

Modellierung der Verformung kohäsionslosen Materials durch turbulente Strömungen mit Hilfe der Level Set Methode

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Susanne Kraft
aus Darmstadt

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. M. Oberlack
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat. M. Schäfer
Tag der Einreichung:	27.08.2009
Tag der mündlichen Prüfung:	24.11.2009

Darmstadt 2009

D17

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachgebiet Strömungsdynamik des Fachbereichs Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt im Rahmen eines DFG Projektes.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich während meiner Promotionszeit unterstützt haben!

Besonders bedanken möchte ich mich beim Leiter des Fachgebiets Herrn Prof. Dr. habil. Martin Oberlack, der mir nicht nur diese Arbeit ermöglicht hat, sondern mich auch mit seiner Flexibilität und seinem Verständnis in jeder Lage unterstützt hat und es mir somit möglich war, Familie und Beruf zu vereinbaren. Auch danke ich Herrn PD Dr. habil. Yongqi Wang, der immer ein offenes Ohr für mich hatte und viele anregende Diskussionen mit mir führte. Bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Dr. rer. nat. Michael Schäfer für die Übernahme des Korreferats sowie den Mitgliedern der FASTEST Gruppe, die mir stets bei Problemen mit dem Programmcode weitergeholfen haben und ohne deren Hilfe ich manchmal völlig verzweifelt wäre.

Bedanken möchte ich mich auch bei Ingmar Wendling, Florian Kummer und George Khujadze, die mir in fachlicher sowie moralischer und meinem Computer in technischer Hinsicht jederzeit zur Seite standen und somit einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet haben.

Ein Dankeschön auch an Norma Kirchheim, die mich besonders im letzten Jahr bei gelegentlichen Treffen zum Mittagessen immer wieder motiviert hat und mit mir das Leid teilte, neben der Arbeit die Dissertation beenden zu müssen.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei meinen Freunden, die mir in meiner Freizeit den nötigen Ausgleich zur wissenschaftlichen Arbeit geliefert haben und bei meinen neuen Arbeitskollegen bei der Adam Opel GmbH, die mich durch ständiges Nachfragen nach dem Stand meiner Doktorarbeit positiv unter Druck gesetzt haben.

Ein weiterer Dank geht an Axel Winterscheid, meinen Bruder Stefan Kraft sowie an Elke Vomland für die Zeit, die sie für das Lesen und Korrigieren der Arbeit aufwendet haben.

Besonderen Dank gilt meinen Eltern, die mir vor allem durch ihre Hilfe bei der Kinderbetreuung oft den Rücken freigehalten haben. Unendlichen Dank gebührt meinem Mann Oliver Kraft, der mich wirklich in allen Bereichen unglaublich unterstützt hat.

Ich freue mich, dass ich in Zukunft mehr Zeit für meine Familie haben werde und hoffe, dass ich meinen Mann bei der Fertigstellung seiner Dissertation genauso unterstützen kann wie er es getan hat.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	vii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit	4
2 Theorie und Modellierungsansätze zum Sedimenttransport	7
2.1 Erosionsrate	8
2.2 Transport in Suspension	14
2.3 Sedimentationsrate	15
3 Phänomenologische Beschreibung der Riffelbildung	17
3.1 Riffelentstehung	19
3.2 Geometrie voll ausgebildeter Riffel	20
3.3 Strömung über Riffel	21
3.4 Wanderung von Riffeln	22
4 Theoretische Grundlagen zur Berechnung turbulenter Strömungen	25
4.1 Navier-Stokes'sche Gleichungen	25
4.2 Turbulenz	26
4.2.1 Skalen der Turbulenz	27
4.2.2 Reynoldsmittelung	29
5 Numerische Simulation turbulenter Strömungen	31
5.1 Direkte Numerische Simulation	31
5.2 RANS	31
5.3 Large Eddy Simulation	33
6 Grundlagen des numerischen Berechnungscodes	41
6.1 Finite Volumen Diskretisierung	41
6.2 Zeitliche Diskretisierung	44
6.3 Druckkorrekturverfahren	45
6.4 Lösungsverfahren	48
7 Level Set Methode	49
7.1 Theoretische Grundlagen	49
7.2 Numerische Implementierung	50
7.2.1 Extension-Velocity-Methode	50
7.2.2 Fast Marching Methode	53

8	Testfälle und ihre Ergebnisse	57
8.1	Vergleich Referenzrechnung - Level Set Methode	60
8.1.1	Beschreibung der Referenzrechnung	60
8.1.2	Ergebnisse der Referenzrechnung	61
8.1.3	Beschreibung der Testfallgeometrie - Level Set Methode	65
8.1.4	Ergebnisse der Testfallgeometrie - Level Set Methode	66
8.2	Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes	70
8.2.1	Zeitlich gemitteltetes Strömungsfeld	71
8.2.2	Instationäres Strömungsfeld	75
8.3	Konzentrationsverteilung	77
8.4	Riffelwanderung	82
8.5	Beschreibung der Erosion mit Fluktuationsgrößen	85
8.6	Bildung der Riffelstruktur	91
9	Zusammenfassung und Ausblick	97
10	Literaturverzeichnis	101

Nomenklatur

$*$	Fluktuationen einer physikalischen Größe [–]
χ_i	skalarer Feinstrukturfluss [m/s]
Δt	Zeitschrittweite, Messperiode [s]
Δ	Filterweite [m]
δ_{ij}	Kronecker Delta [–]
\dot{m}	Massenfluss [kg^3/s]
ϵ	Dissipationsrate der Turbulenzenergie [m^2/s^3]
η_k	Kolmogorov-Länge [m]
γ	Interpolationsfaktor [–]
λ	= K/L Riffelsteilheit [m]
\mathbf{e}	Einheitsvektor
\mathbf{n}	Normalenvektor
\mathbf{x}	Ortsvektor
μ	dynamische Viskosität [$kg/(ms)$]
ν	kinematische Viskosität [m^2/s]
ν_t	turbulente kinematische Viskosität [m^2/s]
$\bar{*}$	gemittelte Größe
$\overline{u'_i u'_j}$	Reynoldscher Spannungstensor [m^2/s^2]
\bar{u}_i	mittlere Geschwindigkeit [m/s]
ϕ_p	dimensionslose Partikelaufnahme rate nach Einstein [–]
ρ	Dichte des Wassers [kg/m^3]
ρ_s	Dichte des Sediments [kg/m^3]
σ	Schmidtzahl [–]
σ_t	turbulente Schmidtzahl [–]
$\tau_{c,eff}^*$	dimensionslose effektive kritische Wandschubspannung [–]
τ_c^*	dimensionslose mittlere kritische Wandschubspannung [–]
$\tau_c^{*'} $	dimensionslose Fluktuationen der kritischen Wandschubspannung [–]
τ_c	kritische Wandschubspannung [N/m^2]

τ_{ij}	Cauchyscher Spannungstensor [N/m^2]
τ_{ij}	Feinstrukturspannungen [N/m^2]
τ_k	Kolmogorov-Zeit [s]
τ_w	Wandschubspannung [N/m^2]
θ	Shieldparameter, dimensionslose Wandschubspannung [-]
θ_{cr}	kritischer Shieldparameter, dimensionslose kritische Wandschubspannung [-]
φ	natürlicher Böschungswinkel [Deg]
$\tilde{*}$	gefilterte Größe
A	Fläche [m^2]
C	Germanokonstante [-]
c	lokale Sedimentkonzentration [-]
c_0	Konzentration an der Sohle [-]
C_S	Smagorinsky-Konstante [-]
D	charakteristische Länge [m]
D_*	dimensionsloser Partikeldurchmesser [-]
d_{50}	mittlerer Korndurchmesser [m]
DNS	Direkte Numerische Simulation
E	Partikelaufnahmerate [kg/sm^2]
F_T	sohlparallele Schubkraft [$kg * m/s^2$]
F_W	Gewichtskraft [$kg * m/s^2$]
F_{Ext}	Ausbreitungsgeschwindigkeit (extension velocity) [m/s]
Fr	Froudezahl [-]
G	skalare Feldvariable (Die Einheit einer Länge erhält sie durch die Abstandsfunktion) [m]
g	Erdbeschleunigung [m/s^2]
$G(x_i, x'_i)$	Filterfunktion [-]
i, j, k	Indizes für die Koordinatenrichtung
K	Riffelhöhe [m]
k	Wellenzahl [$1/m$]
L	Riffellänge [m]
l	Feinstrukturlänge [m]
L_{ij}	Germano Identität (Leonard Term) [m^2/s^2]

LES	Large Eddy Simulation
M	Masse [kg]
P	Druck geteilt durch Dichte [m^2/s^2]
P	Erosionswahrscheinlichkeit [-]
p	Druck [N/m^2]
Q	Quadrat des Feinstrukturfehlers [-]
q_f	Feststoffstrom [m^2/s]
$RANS$	Reynolds Averaged Navier-Stokes
Re	Reynoldszahl [-]
S	Sedimentationsrate [m/s]
s	$= (\rho_s - \rho)/\rho$ [-]
S, N, W, E	Himmelsrichtungen
S_{ij}	Scherspannungstensor [$1/s$]
T	transport-stage Parameter [-]
T_{ij}	Feinstrukturspannungstensor bei Anwendung des Testfilters [m^2/s^2]
U	mittlere Geschwindigkeit [m/s]
u'_i	Geschwindigkeitsfluktuation [m/s]
u_i	momentane Geschwindigkeit [m/s]
$u_{*,cr}$	kritische Wandschubspannungsgeschwindigkeit [m/s]
u_*	Wandschubspannungsgeschwindigkeit [m/s]
$u_{ }$	wandparallele Geschwindigkeitskomponente [m/s]
v_m	mittlere Strömungsgeschwindigkeit [m/s]
v_r	Riffelwanderungsgeschwindigkeit [m/s]
w_s	Sinkgeschwindigkeit [m/s]
x_i	x_i -Koordinate [m]
y^+	dimensionloser Wandabstand [-]

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Sohle eines Fließgewässers besteht meist aus feinen kohäsionslosen Lockersedimenten und ist somit nicht formstabil. Kann die Sohle den durch die Strömung erzeugten Wandschubspannungen nicht standhalten, wird Sediment flussabwärts transportiert (Erosion). In strömungsschwächeren Gebieten, wo die Schwerkraft der Teilchen überwiegt, lagern sich die Sedimente an der Sohloberfläche an (Sedimentation). Die Erosionen und Sedimentationen führen zu Verformungen der Sohle, die sich auf die Strömung und die damit verbundene Sedimenttransportrate auswirken. Unter bestimmten Strömungsbedingungen bilden einige Materialien sogenannte Riffel aus (Zanke 1999).

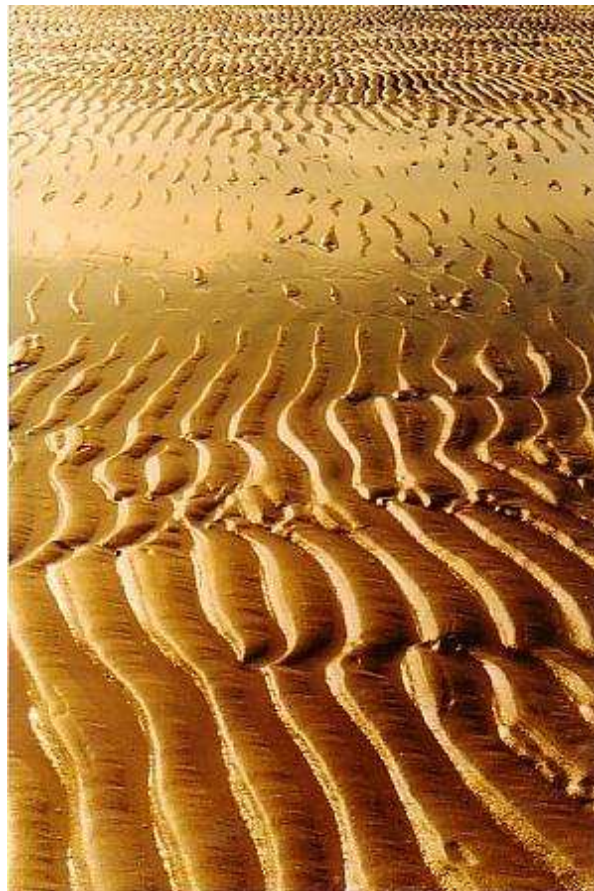


Abbildung 1.1: Darstellung einer Riffelstruktur (www.johnstedman.co.uk)

Riffel sind kohärente regelmäßige Oberflächenstrukturen (vgl. Abbildung 1.1). Sie besitzen einen dynamischen Gleichgewichtszustand. Das bedeutet, dass die Riffel ihre Gestalt behalten, jedoch nicht ortsfest sind. Die Riffel bewegen sich mit einer Wanderungsgeschwindigkeit, die relativ gesehen klein zur Strömungsgeschwindigkeit ist (Kühlborn 1993). Riffelbildung kommt ubiquitär als natürlicher Prozess sowohl in binnen als auch in marinen Strömungen vor. Es besteht ein großes wissenschaftliches und wirtschaftliches Interesse dieses Phänomen genau modellieren zu können, um die Auswirkung anthropogener Eingriffe in Gewässern vorhersagen zu können.

Das grundlegende Verständnis von Sedimentation und Erosion sowie das metastabile Gleichgewicht dieser Prozesse sind nicht allein von theoretischem Interesse, sondern vor allem für die Beschreibung von großskaliger Sedimentation von besonderer Bedeutung. Obwohl Sedimentation auf kleinsten Skalen abläuft, ist sie verantwortlich für weiträumige Veränderungen sowohl in Binnengewässern als auch in Küstenregionen. Riffelbildung verursacht eine Formrauheit der Sohle und besitzt somit einen wesentlichen Einfluss auf die Sedimenttransportrate. Die Erosion und Sedimentation fester Materie führt in vielen Bereichen zu Problemen, denen z.T. nur mit einem enorm hohen finanziellen Aufwand zu begegnen ist. Beispiele sind die Erosion von Küstengebieten wie auch die Sedimentation von Fluss- und Kanalbetten sowie das Verlanden von Stauanlagen.

1.2 Stand der Forschung

Das Phänomen der Riffelentstehung und -wanderung wurde in zahlreichen Arbeiten experimentell analysiert (z.B. Fürbötter (Fürbötter 1983), Kühlborn (Kühlborn 1993)). In den letzten Jahren hat die numerische Simulation des Sedimenttransports, aufgrund der Zunahme der Rechnerleistung, an Bedeutung gewonnen.

Chang und Scotti (Chang & Scotti 2003) untersuchen mit Hilfe einer Large Eddy Simulation (LES) den Einfluss von kohärenten Strukturen auf den Partikeltransport in Suspension bei einer festen, wellenförmigen Oberfläche. Sie benutzen dabei einen Lagrangeschen Ansatz zur Modellierung der Partikelbewegung und berechnen die Bewegung jedes einzelnen Partikels unter Berücksichtigung der Widerstands-, Auftriebs- und Schwerkraft. Bei ihren Simulationen beobachten sie, dass die Bahn eines Partikels im Wesentlichen von der ursprünglichen Lage des Partikels abhängt. Partikel, die sich von der Luvseite lösen werden in Bodennähe Richtung Krone befördert und bewegen sich mit der Strömung oberhalb der Krone in Suspension weiter. Ein großer Teil der Partikel im Bereich der Krone wird in die Rezirkulationszone befördert und bildet dort zusammen mit denen im Leebereich erodierten Partikeln eine Partikelwolke. Der Unterschied wird durch die verschiedenen kohärenten Strukturen im Luv- und Kronenbereich erklärt. In einer weiteren Arbeit von Chang und Scotti (Chang & Scotti 2004) werden die Ergebnisse einer LES mit denen einer RANS-Modellierung, bei der sie das $k-\omega$ - Modell verwenden, verglichen. Es wird ebenfalls der Sedimenttransport über eine feste, wellenförmige Oberfläche modelliert. Dabei kommen sie zu

dem Ergebnis, dass ihre RANS-Modellierung die wichtigen kohärenten Strukturen in unmittelbarer Sohlnähe und den Transport in Suspension nicht korrekt wiedergeben.

Zedler und Street (Zedler & Street 2001) untersuchen ebenfalls den Einfluss von Riffeln auf den Sedimenttransport. Auch sie benutzen hierfür eine sinusförmige Welle als feste Sohle. Allerdings verwenden sie die Eulersche Betrachtungsebene und simulieren den Partikeltransport in Suspension über die Konzentrationsverteilung mit Hilfe der gefilterten Konvektions-Diffusions-Gleichung. Als Randbedingung für die Konzentrationsgleichung werden die Materialflüsse normal zu den Begrenzungsflächen angegeben. An der Sedimentoberfläche wird die Erosionsrate mit Hilfe der "Pick-up" Funktion von van Rijn (van Rijn 1984a) berechnet, wobei zur Ermittlung der kritischen Wandschubspannung das Shieldsdiagramm (Shields 1936) verwendet wird. Die Ergebnisse verifizieren die Beobachtungen von Soulsby et al. (Soulsby, Atkins & Salkfield 1994) und Bennet und Best (Bennett & Best 1995), dass kohärente Strukturen maßgeblich für den Sedimenttransport in Suspension verantwortlich sind. Sie merken jedoch an, dass in diesem Bereich noch erheblicher Forschungsbedarf besteht. Sie kritisieren die Verwendung ihrer "Pick-up" Funktion, die auf zeitlich gemittelten Wandschubspannungen basiert.

Bei den beiden Testfällen von Zedler und Street sowie Chang und Scott ist anzumerken, dass die im englischen als "ripple" bezeichneten Oberflächen große Abweichungen zu der in der Natur auftretenden Riffelbildung aufweisen.

Bei der Auslegung technischer Systeme genügen häufig die statistischen Mittelwerte der turbulenten Strömungsparameter, so dass sich die RANS-Modellierung anbietet. An dieser Stelle sei beispielhaft die Arbeit von Wu et al. (Wu, Rodi & Wenka 2000) zu nennen. Sie berechnen die Strömung eines um 180 gekrümmten Kanals mit einer beweglichen Sohle. Hierzu benutzen sie die RANS Methode und modellieren die turbulenten Spannungen mit dem k - ϵ -Modell. Um den Sedimenttransport zu berechnen unterteilen sie das Gebiet in einen Bodenfrachtbereich und in einen Suspensionsbereich. Zwischen den zwei Schichten besteht ein Austausch durch eine Depositionsrate D_b (Übergang von Sedimentfrachten aus dem Suspensionsbereich in den Bodenfrachtbereich) und einer Eintragsrate E_b (Übergang von Sedimentfrachten aus dem Bodenfrachtbereich in den Suspensionsbereich). Im Suspensionsbereich lösen sie ebenfalls die Konvektion-Diffusions-Gleichung und im Bodenfrachtbereich benutzen sie eine Massenbilanzgleichung für den Sedimenttransport von Bodenfrachten nach van Rijn (van Rijn 1987). Um die Bodendeformation zu berechnen wird die über die Wassertiefe h gemittelte Bodenevolutionsgleichung verwendet. Im Allgemeinen werden die wesentlichen Merkmale im Krümmungsbereich, wie die Kolkentwicklung auf der Außenseite und die Sedimentation auf der Innenseite, sowie die Sekundärströmung, gut wiedergegeben. Jedoch wird angemerkt, dass in diesem Testfall der Transport in Suspension eine untergeordnete Rolle spielt und das Verfahren noch für Strömungsfälle getestet werden muss, an denen der Transport in Suspension maßgeblich beteiligt ist.

Die zwei-dimensionale tiefengemittelte Flachwassergleichung stellt eine weitere Modellierungsmethode dar. Bei den meisten wasserbaulichen relevanten Berechnungen

beträgt die laterale Ausdehnung ein Vielfaches der Wassertiefe. Die vertikale Geschwindigkeit ist somit wesentlich kleiner als die horizontale Geschwindigkeit und die Druckverteilung ist nahezu hydrostatisch. Somit kann ein drei-dimensionales Problem durch eine zwei-dimensionale tiefengemittelte Flachwassergleichung modelliert werden und der numerische Aufwand reduziert sich erheblich. Basierend auf dieser Methode beschäftigt sich die Arbeit von Duc et al. (Duc, Wenka & Rodi 2004) mit der Bodendeformation eines Kanals mit alluvialer Sohle. Für ihre Berechnungen verwenden sie einen Finite Volumen Code, der über ein hydrodynamisches Modul verfügt, welches auf der zwei-dimensionalen tiefengemittelten Flachwassergleichung basiert. Das Sedimenttransportmodul berücksichtigt den sohlennahen Transport sowie den Transport in Suspension. Um die Evolution der Bodenoberfläche zu berechnen benutzen sie ebenfalls die tiefengemittelte Bodendeformationsgleichung. Es sei angemerkt, dass bei dieser Methode alle Informationen in vertikaler Richtung verloren gehen und somit Sekundärströmungen und Ablösungen nicht berechnet werden können. Ein detailliertes Verständnis und eine genaue Beschreibung der Riffelbildung ist somit auf der Basis der Flachwassergleichungen nicht zu erzielen.

1.3 Ziele und Aufbau der Arbeit

Als Neuerungen bei der Modellierung sollen in dieser Arbeit zwei spezielle Methoden eingesetzt werden. Zum einen ist für die o.g. dynamische Grenzfläche zwischen Fluid und Sediment die Level Set Methode anzuwenden, die sich als besonders genaue und flexible Methode bei der Abbildung von Grenzflächen zwischen Medien etabliert hat. Darüber hinaus soll für bewegte Riffeloberflächen die Large-Eddy Simulation zur Beschreibung der Turbulenz verwendet werden.

Da es sich wie bei dem Phänomen der Riffelbildung, um einen dynamischen drei-dimensionalen strömungsmechanischen Prozess handelt, der nicht durch "statische" Modelle beschrieben werden kann, ist ein tieferes Verständnis nur durch eine detaillierte Modellierung zu erwarten. Bis heute ist es nicht möglich, das Phänomen der Riffelbildung physikalisch hinreichend exakt zu beschreiben und analytisch genau zu berechnen. Somit ist es weder möglich die Form und Länge eines Riffels eindeutig aus den Strömungsbedingungen herzuleiten, noch die Eigengeschwindigkeit der Riffelpropagation. Neben den experimentellen Untersuchungen stellt die numerische Simulation turbulenter Strömungen und die damit verbundene Einwirkung auf die Sohloberfläche ein sehr wichtiges Instrument dar, um in Zukunft die Auswirkungen von Regulierungsmaßnahmen in Flüssen auf Strömung und Sedimenttransport vorhersagen zu können.

Die Gliederung der Arbeit wird im Folgenden aufgezeigt.

Zunächst werden in Kapitel 2 die grundlegenden Annahmen und Berechnungsansätze zum Sedimenttransport erläutert. Verschiedene Ansätze zum Abtrag von Sediment und die Physik der Sedimentbewegung in Suspension sowie die Beschreibung

der Ablagerung von Partikeln, der Sedimentation, die im Rahmen dieser Arbeit in den Code FASTEST-3D implementiert werden, werden vorgestellt.

In Kapitel 3 erfolgt die phänomenologische Beschreibung der Riffelbildung und der Riffelwanderung. Der Stand der Forschung wird aufgezeigt und die relevanten Erkenntnisse über die Riffelgeometrie, die Strömungen über Riffelstrukturen sowie der Riffelbewegung beschrieben.

Kapitel 4 erläutert die fluidmechanischen Grundlagen turbulenter Strömungen.

Das anschließende Kapitel 5 gibt einen Überblick der gebräuchlichsten Modelle zur Beschreibung turbulenter Strömungen. Im Besonderen wird die Methodik der Grobstruktursimulation (*engl.: Large Eddy Simulation [LES]*) ausführlich erläutert.

Das bei dieser Arbeit verwendete Programm FASTEST-3D wird im Kapitel 6 beschrieben. Die in FASTEST-3D verwendeten Diskretisierungen der mathematischen Gleichungen bei der Finite Volumen Methode sowie die Lösungsalgorithmen werden vorgestellt.

Kapitel 7 befasst sich mit der im Rahmen der Arbeit verwendeten Level Set Methode. Dabei wird die Theorie der Methode und die numerische Umsetzung erklärt.

In Kapitel 8 werden verschiedene LES Rechnungen durchgeführt. Für die Testfälle wird eine Kanalströmung verwendet, die in diesem Kapitel vorgestellt wird. Zuerst wird eine randangepasste LES mit verschiedenen Gittern durchgeführt, um den Einfluss der Gitterauflösung zu untersuchen. Die im Rahmen dieser Arbeit implementierte Randbedingung mit Hilfe der Level Set Methode in einem orthogonalen Gitter wird anschließend mit einer randangepassten LES Rechnung verglichen und bewertet. Danach wird die Strömung über Riffel untersucht. Dabei werden verschiedene Riffelgeometrien mit unterschiedlichen Reynoldszahlen verwendet. Anschließend werden die Konzentrationsfelder der verschiedenen Abtragsgleichungen für die Erosion verifiziert. Im Folgenden wird das Verhalten der Riffelwanderung bei verschiedenen Abtragsgleichungen erforscht. Im Zuge der Ermittlung der kritischen Wandschubspannung wird ein von Zanke (Zanke 2001) vorgeschlagenes Verfahren in das Programm FASTEST-3D implementiert und getestet. Dabei wird eine modifizierte Abtragsgleichung erstellt und damit die Riffelwanderung bei verschiedenen Reynoldszahlen untersucht. Als letzten Unterpunkt dieses Kapitel wird die Entstehung einer Riffelstruktur analysiert.

Abgeschlossen wird die Arbeit mit einer Zusammenfassung der gewonnen Erkenntnisse und einem Ausblick auf Verbesserungsmöglichkeiten und weiteren sinnvollen Forschungsbedarf im Hinblick auf die Beschreibung von morphologischen Veränderung von Sedimentoberflächen aufgrund Erosion und Sedimentation.

2 Theorie und Modellierungsansätze zum Sedimenttransport

Grundsätzlich unterscheidet man zwei verschiedene Arten des Sedimenttransports. Einerseits wird das kohäsionslose¹ Sediment sohnah befördert (bed load), zusätzlich wird Material von der Sohle aufgewirbelt und in Suspension transportiert (suspended load). Dazwischen existiert ein kleiner Bereich, in dem die Körner sprungweise transportiert werden (saltation). Die Klassifizierung der Fortbewegungsart eines Partikels ist über das Verhältnis der Sinkgeschwindigkeit w_s zur kritischen Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_{*,cr}$ definiert. Breusers und Raudkivi (Breusers & Raudkivi 1991) haben folgende Übergangswerte definiert:

- bed load $6,0 > w_s/u_{*,cr} > 2$
- saltation $2,0 > w_s/u_{*,cr} > 0,7$
- suspended load $0,7 > w_s/u_{*,cr} > 0$

Es gibt jedoch keine eindeutige Trennung zwischen den verschiedenen Transportformen. Der Übergang ist fließend und nicht einheitlich definiert. Einstein (Einstein 1950) beispielsweise unterscheidet nur den sohnahen Transport und den Transport in Suspension. Es existiert eine Vielzahl an Sedimenttransportformeln mit weitgehend empirischer oder semi-empirischer Natur. Da die Gleichungen nicht aus first principles ermittelt wurden, sind sie immer nur unter bestimmten Bedingungen anwendbar und es ist keine Universalität gegeben.

Aufgrund des gewählten Modellierungsansatzes (siehe Kapitel 7) wird nur der Transport in Suspension modelliert. Prozesse, wie das Rutschen von Sediment bei Überschreitung des natürlichen Böschungswinkels, sowie das Rollen von Partikeln entlang der Sohle werden physikalisch nicht beschrieben. Folglich wird in diesem Kapitel nur der Transport in Suspension näher erläutert.

Übersteigt die Wandschubspannung einen für das Sohlmaterial kritischen Wert, wird das Material erodiert und gelangt in Suspension. In Suspension wird es solange weiter transportiert, bis es zu einem Gebiet kommt, in dem die lokalen Strömungsbedingungen das Sediment nicht weiter transportieren und es sich wieder ablagert bzw. sedimentiert (siehe Abbildung 2.1).

Bei der Modellierung wird üblicherweise die Partikelaufnahme und die Partikelablagung als ein eigenes Untersystem (*engl.: subsystem*) angesehen, welches über die

¹nichtbindige bzw. rollige Böden nach DIN 1054: z.B. Sand, Kies ($d \geq 0.06\text{mm} : \geq 85\text{Gew.} - \%$). Im Gegensatz zu kohäsivem Material spielen die elektrostatischen Kräfte (van der Waalsche Kräfte), welche eine Anziehungskraft der Partikel untereinander bewirken, eine untergeordnete Rolle.

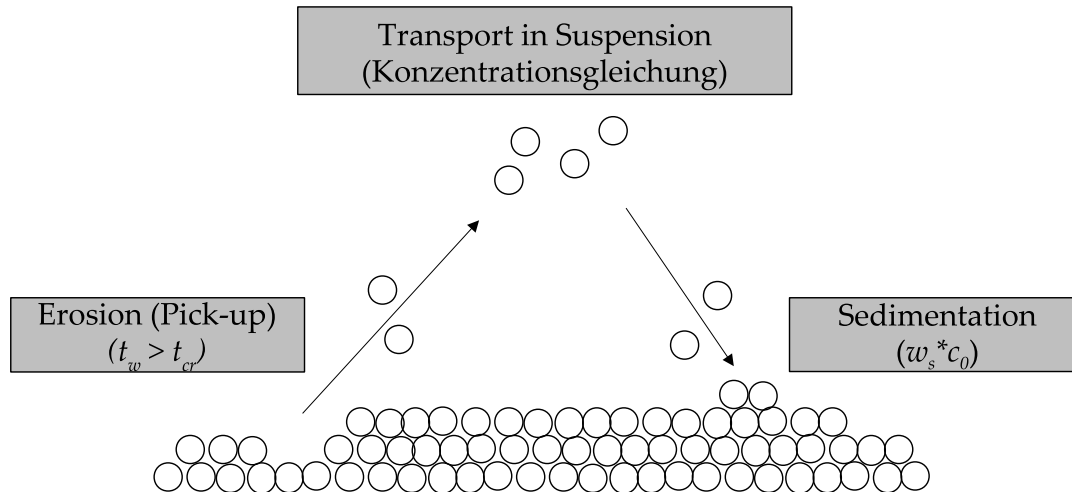


Abbildung 2.1: Schema des Transports in Suspension

Kopplung mit einer Kontinuitätsgleichung die Berechnung der Sedimenttransportrate ermöglicht. Um den Transport in Suspension zu beschreiben, muss folglich die Erosions- und Sedimentationsrate berechnet werden. Dies wird in den nächsten Unterkapiteln näher erläutert.

2.1 Erosionsrate

Ein wesentlicher Bestandteil zur Beschreibung des Sedimenttransports ist die Kenntnis über den Bewegungsbeginn von Partikeln. Eine Erste Abhandlung zur Erosionsproblematik wurde 1936 von Shields (Shields 1936) veröffentlicht. Sie basiert auf der Betrachtung der Grenzschichtströmung von Prandtl und von Karman. Er beschreibt das Problem in Abhängigkeit folgender Parameter:

- Dichte des Sediments
- Dichte des Fluids
- kinematische Viskosität des Fluids
- Kornverteilung des Sediments
- Sohlschubspannung

Wird die Strömungsgeschwindigkeit bei einer kohäsionslosen ruhenden Sohle sukzessive erhöht, kann man beobachten, dass bei einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit einzelne Körner anfangen, sich intermittierend und auf zufällige Art und Weise von der Sohle zu lösen. Zwei stochastische Größen und deren Zusammenhang sind dafür ausschlaggebend. Zum einen die momentan angreifende Wandschubspannung, die von der turbulenten Strömung und dessen kohärenten Strukturen induziert wird, sowie die kritische Wandschubspannung, bei der das Sedimentgefüge in seiner Lage instabil wird. Diese ist von der Form, dem Gewicht und der Anordnung der

Partikel abhängig. Voraussetzung für die Erosion von Partikeln ist, dass die unmittelbare Wandschubspannung die kritische Wandschubspannung des Sohlmaterials überschreitet.

In der Literatur existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Ansätze. Ein weit verbreitetes Verfahren zur Bestimmung des Bewegungsbeginns von kohäsionslosen Partikeln repräsentiert die Shieldskurve (siehe Abbildung 2.2). Diese Kurve basiert auf den Ergebnissen zahlreicher experimenteller Laboruntersuchungen mit verschiedenen Korndichten und Wandschubspannungen. Shields benutzt zur Darstellung seiner Ergebnisse den dimensionslosen Korndurchmesser² D_* und die dimensionslose kritische Wandschubspannung³ θ_{cr} . Das Diagramm besteht aus einem breiten Kurvengürtel, da der Bewegungsbeginn für die verschiedenen Sedimente in unterschiedliche Erosionsstadien aufgefächert wird.

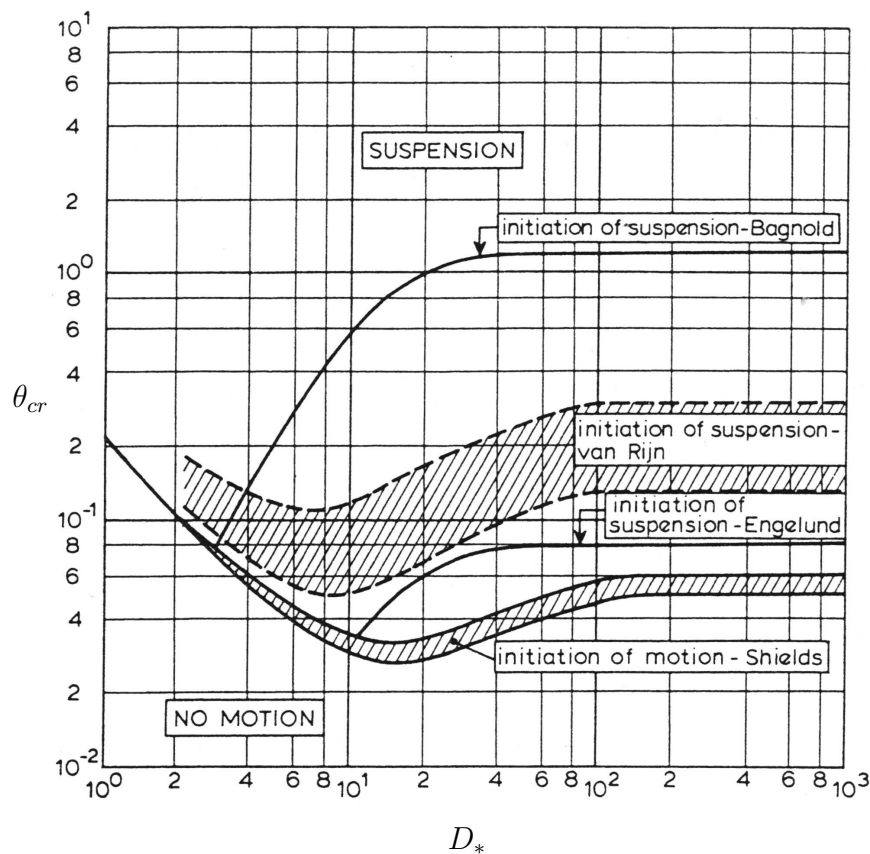


Abbildung 2.2: Shieldskurve (aus (van Rijn 1984c))

²dieser Parameter wird auch als sedimentologische Korngröße bezeichnet

³dieser Parameter wird auch als Shields-Parameter oder Mobilitätsparameter bezeichnet

Der dimensionslose Korndurchmesser D_* ist wie folgt definiert:

$$D_* = d_{50} \left[\frac{sg}{\nu^2} \right]^{1/3}, \quad (2.1)$$

mit $s = (\rho_s - \rho)/\rho$, wobei ρ_s die Sedimentdichte und ρ die Wasserdichte darstellen. ν beschreibt die kinematische Viskosität und d_{50} ⁴ entspricht dem mittleren Korndurchmesser.

Der kritische Shields-Parameter wird folgendermaßen berechnet:

$$\theta_{cr} = \frac{u_{*,cr}^2}{sgd_{50}} = \frac{\tau_c}{\rho s g d_{50}}. \quad (2.2)$$

Die Shieldskurve kann nach van Rijn (van Rijn 1984a) auch mit Hilfe der unten aufgeführten Auflistung als Funktion des sedimentologischem Korndurchmessers explizit berechnet werden (van Rijn 1984a):

$$\begin{aligned} \theta_{cr} &= 0.24(D_*)^{-1} \quad \text{für } D_* \leq 4 \\ \theta_{cr} &= 0.14(D_*)^{-0.64} \quad \text{für } 4 < D_* \leq 10 \\ \theta_{cr} &= 0.04(D_*)^{-0.1} \quad \text{für } 10 < D_* \leq 20 \\ \theta_{cr} &= 0.013(D_*)^{0.29} \quad \text{für } 20 < D_* \leq 150 \\ \theta_{cr} &= 0.055 \quad \text{für } D_* > 150 \end{aligned}$$

Liegt die momentane dimensionslose Wandschubspannung

$$\theta = \frac{\tau_w}{(\rho_s - \rho)gd_{50}} \quad (2.3)$$

über θ_{cr} , werden Partikel bewegt. Die Shieldskurve ist somit eine "Schwellenwertfunktion", die in der Natur in dieser Klarheit nicht vorhanden ist. In der Natur existiert, bedingt durch die verschiedenen Sedimentzusammensetzungen sowie die Turbulenzbewegungen, keine scharfe Trennung in dieser Form. Einige Autoren haben versucht diesem natürlichen Prozess Rechnung zu tragen. Einstein (Einstein 1950) hat dieses Phänomen mittels eines stochastischen Ansatzes abgebildet. Er leitet Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die angreifende Wandschubspannung und für den Erosionswiderstand am einzelnen Partikel her, um den Bewegungsbeginn zu beschreiben. Zanke (Zanke 2001) hingegen hat einen analytischen Ansatz entwickelt, der es ermöglicht, den Bewegungsbeginn allein durch den Winkel der inneren Reibung und die Turbulenz zu beschreiben. Bei einer turbulenzfreien Strömung wird die bewegungsauslösende Wandschubspannung eines Partikels allein durch den Reibungswinkel des Sediments bestimmt. Die dimensionslose kritische Wandschubspannung

⁴ $d_{50} \equiv 50\%$ Siebdurchgang in der Summenkurve der Sedimentkorngrößen.

τ_c^* ist definiert durch das Verhältnis der Schubkraft F_T parallel zur Sohle und der Gewichtskraft F_W der oberen Sedimentschicht, auf die die Wandschubspannung wirkt.

$$\tau_c^* = \frac{\tau_c}{(\rho_s - \rho)gd} = \text{const.} \cdot \frac{F_T}{F_W} = \text{const.} \cdot \tan\varphi \quad (2.4)$$

Für natürliche Sedimente mit einem Feststoffanteil von 70% kann $\tau_{c,eff}^*$ somit wie folgt beschrieben werden.

$$\tau_{c,eff}^* = 0.7 \cdot \tan\varphi, \quad (2.5)$$

wobei der Index *eff* besagt, dass die tatsächlich lokal und momentan angreifenden Wandschubspannungen gemeint sind und φ den natürlichen Böschungswinkel definiert. Für laminare Strömungen ist der Bewegungsbeginn allein durch Gleichung 2.5 bestimmt, wobei bei Sanden φ im Bereich von 30° liegt. Bei turbulenten Strömungen wird die mittlere kritische Wandschubspannung τ_c^* vermindert, da turbulente Fluktuationen der kritischen Wandschubspannung $\tau_c^{*'}$ und die daraus resultierenden Liftkräfte das Sediment effektiv leichter machen und somit die aktuelle kritische Wandschubspannung $\tau_{c,eff}^*$ größer als die mittlere kritische Wandschubspannung ist (siehe Abbildung 2.3).

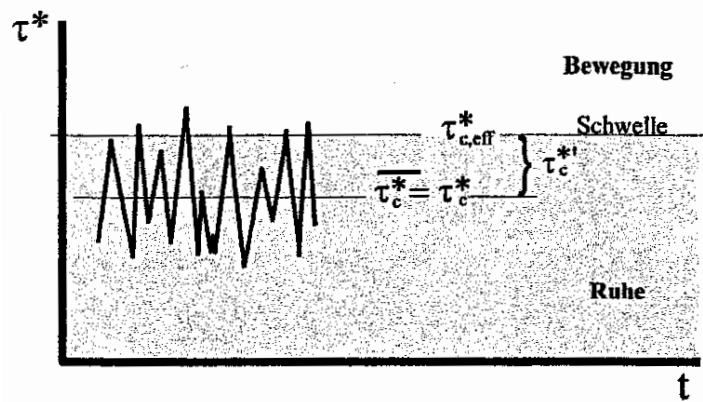


Abbildung 2.3: mittlere und wirksame kritische Wandschubspannung

Nach Zanke wird die kritische Wandschubspannung wie folgt bestimmt:

$$\tau_c^* = 0.7 \cdot \tan\varphi - \tau_c^{*'} \quad (2.6)$$

Die im vorigen Abschnitt aufgezeigten Ansätze von Shields und Zanke beschreiben die Herleitung eines Schwellenwertes zur Bestimmung des Bewegungsbeginns von Sedimenten auf einer Gewässersohle. Aussagen über die Menge des bewegten Materials wurden noch nicht getroffen. Zur Ermittlung einer Sohlbewegung ist das Kenntnis der Erosionsrate und Sedimentationsrate unerlässlich. Wie bereits erwähnt, existieren bisher keine exakten, allgemeingültigen Formeln zur Ermittlung dieser Größen.

Die Auswahl einer adäquaten Formel für eine bestimmte Problemstellung erfordert die genaue Überprüfung der Randbedingungen (Korngröße, Sohlneigungen, usw.), unter denen sie entwickelt wurde und die Kontrolle, ob diese Randbedingungen auf den vorliegenden Anwendungsfall übertragbar und gültig sind. Die Ergebnisse verschiedener Berechnungsansätze können bei einem identischen Anwendungsfall um mehrere Größenordnungen voneinander abweichen.

Um die für die Berechnung des Transports in Suspension benötigte Erosionsrate zu bestimmen, existieren diverse mathematische Modelle (van Rijn 1984a). Ein Teil dieser Modelle beschreibt die Aufnahme der Partikel von der Sohle, die sogenannten "Pick-up" Gleichungen. Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten "Pick-up" Gleichungen näher erläutert.

Da der komplexe Vorgang der Partikelaufnahme bisher nicht theoretisch beschreibbar ist, wurden von **van Rijn** (van Rijn 1984a) im Delft Hydraulic Laboratory mehrere Experimente mit verschiedenen Korndurchmessern ($130 \mu m \leq d_{50} \leq 1500 \mu m$) und Fließgeschwindigkeiten von $0,5 - 1,0 \text{ m/s}$ durchgeführt, um die Partikelaufnahme-rate (*Pick-up rate*) empirisch zu bestimmen. Aus den Versuchen wurde die Sedimentaufnahme-rate wie folgt bestimmt:

$$E = \frac{M}{A\Delta t}, \quad (2.7)$$

wobei E die Partikelaufnahme-rate in Masse pro Einheitsfläche und Zeit (kg/sm^2), M die Masse, A die bewegungsmögliche Oberfläche und Δt die Messperiode darstellen.

Bei den Auswertungen der Versuche wird analog zu der Arbeit von Einstein (Einstein 1950) die dimensionslose Partikelaufnahme-rate verwendet, die wie folgt definiert ist:

$$\phi_p = \frac{E}{\rho_s (sgd_{50})^{0.5}} \quad (2.8)$$

Nach Auswertung der Versuchsergebnisse erhält man für die Partikelaufnahme-rate die folgende Funktion (*engl.: pick-up function*) (siehe Abbildung 2.4):

$$\phi_p = 0.0003 D_*^{0.3} T^{1.5} \quad (2.9)$$

wobei T den Transportzustandsparameter (*engl.: transport-stage parameter*) darstellt. Dabei gilt:

$$T = \frac{u_*^2 - u_{*,cr}^2}{u_{*,cr}^2}, \quad (2.10)$$

wobei $u_{*,cr}$ die kritische Wandschubspannungsgeschwindigkeit nach Shields (siehe Gleichung 2.2) beschreibt.

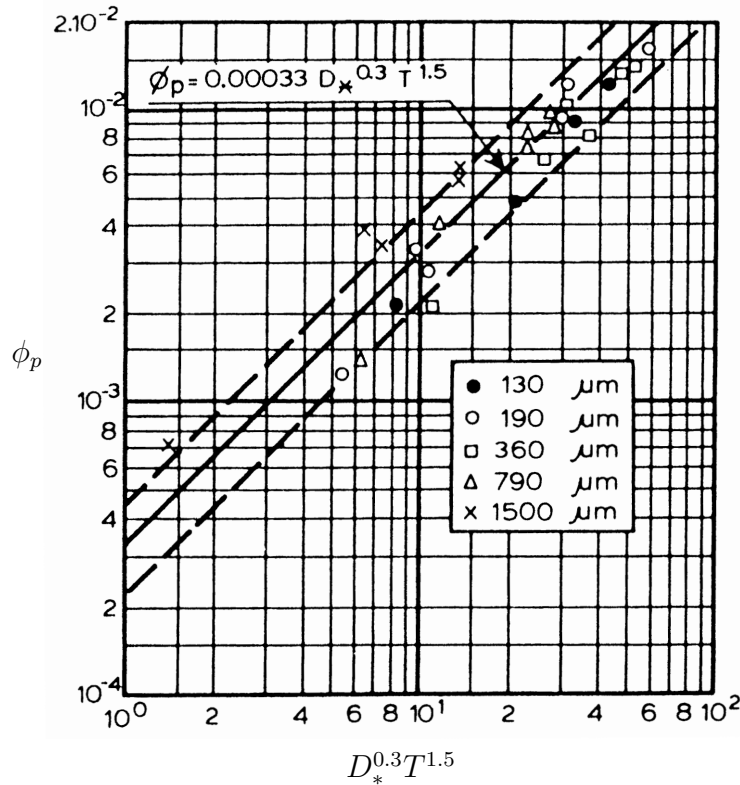


Abbildung 2.4: empirische Pick-up Gleichung nach van Rijn [nach (van Rijn 1984a)]

Es existieren weitere Pick-up Gleichungen, z.B. von Einstein (Einstein 1950) und Yalin (Yalin 1985). Der Ansatz von **Einstein** ist stochastischer Natur. Seine Modellvorstellung unterscheidet sich wesentlich vom Ansatz von van Rijn. Er geht davon aus, dass nicht die mittlere Wandschubspannung die Partikel in Bewegung setzt, sondern turbulente Fluktuationen. Entsprechend ist die mittlere Wandschubspannung nicht Bestandteil seiner Gleichung. Einstein stellt sich den Sedimenttransport als Zusammensetzung von Einzelsprüngen der Partikel vor. Wird durch eine kurzfristige turbulente Fluktuation die Gewichtskraft eines Partikels (F_G) aufgrund der dadurch entstehenden Liftkraft F_L überwunden ($F_L > F_G$), setzt sich dieser Partikel in Bewegung und übt einen Sprung aus. Den Zeitanteil, für den diese Bedingung erfüllt ist, definiert Einstein als Erosionswahrscheinlichkeit. Die Erosionsrate wird wie folgt bestimmt:

$$E = \alpha \rho_s (sgd_{50})^{0.5} P, \quad (2.11)$$

wobei α eine Universalkonstante darstellt, die mit Hilfe experimenteller Daten bestimmt wird. P beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Partikel in einem bestimmten Zeitintervall erodiert wird.

Yalin hingegen leitet seinen Ansatz zur Bestimmung der Erosionsrate aus mittleren Strömungsgrößen her. Er benutzt die kritische Wandschubspannung von Shields. Wird diese überschritten, werden Partikel erodiert und führen einen Sprung aus. Die Anzahl der erodierten Partikel steigt mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit.

Auch seine Konstante α wird mit Hilfe von Versuchen bestimmt. Die Erosionsrate wird nach Yalin folgendermaßen berechnet:

$$E = \alpha \rho_s u_* \quad (2.12)$$

Yalin und van Rijn nehmen bei ihren Berechnungen an, dass die Anzahl der erodierten Partikel mit steigender Wandschubspannungsgeschwindigkeit zunimmt. Diese Annahme ist jedoch stark simplifiziert. Alan und Kennedy (Yalin 1985) beweisen mit ihren Versuchen, dass die Strömung in Sohlhöhe beim Erreichen einer bestimmten Wandschubspannungsgeschwindigkeit "voll gesättigt" ist und die Erosionsrate gegen einen bestimmten Wert konvergiert und nicht mehr ansteigt. Diesen Beobachtungen wird nur der Ansatz von Einstein gerecht.

Abbildung 2.5 können die verschiedenen Abtragsraten eines Sediments mit einem Durchmesser von $130 \mu\text{m}$ in Abhängigkeit der dimensionslosen Wandschubspannung θ entnommen werden.

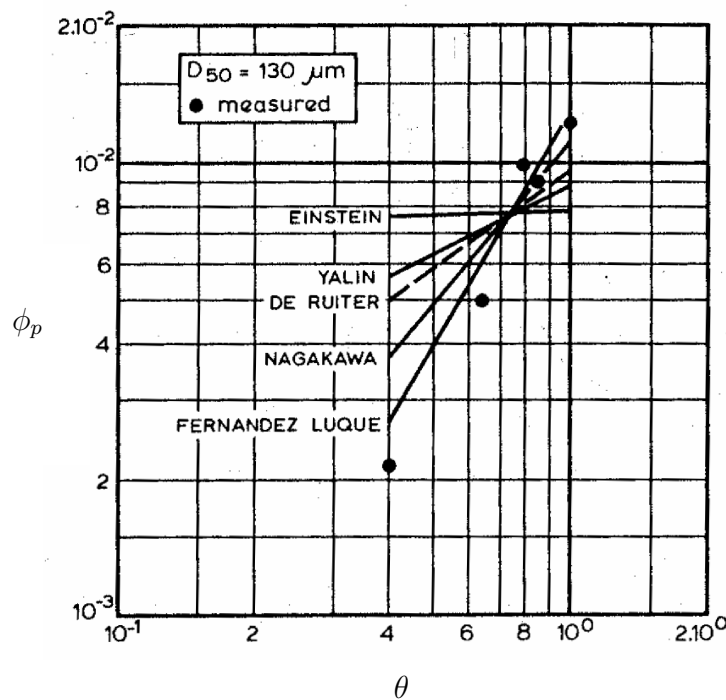


Abbildung 2.5: verschiedene "Pick-up"-Raten für ein Sediment mit einem Durchmesser von $130 \mu\text{m}$ [aus (van Rijn 1984a)]

2.2 Transport in Suspension

Werden kohäsionslose Partikel vom Boden erodiert und in Suspension (schwebend) weitertransportiert, ist die Sinkgeschwindigkeit eine wesentliche Komponente in Bezug auf das Verhalten der Partikel bei Aufwirbelung und Transport. Die Sinkgeschwin-

digkeit ist abhängig von der Gewichtskraft eines Partikels, die den Fallvorgang vorantreibt und der der Fallrichtung entgegen gerichteten Strömungswiderstandskraft. Somit beeinflusst die Dichte und die Geometrie des Sedimentpartikels die Sinkgeschwindigkeit (Zanke 2002). Für Sedimente mit einem mittleren Durchmesser d_{50} von $100 \mu m - 1000 \mu m$ kann die Sinkgeschwindigkeit w_s mit Hilfe des Ansatzes von Zanke (Zanke 1977) berechnet werden:

$$w_s = \frac{10\nu}{d_{50}} \left[\left(1 + \frac{0,01sgd_{50}^3}{\nu^2} \right)^{0,5} - 1 \right]. \quad (2.13)$$

Bei der raumfesten bzw. Eulerschen Betrachtungsebene wird der Partikeltransport in Suspension über die Konzentrationsverteilung mit Hilfe der Konvektions-Diffusions-Gleichung berechnet (Pope 2000, Zedler & Street 2001):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((u_j - w_s \delta_{j2}) c - \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (2.14)$$

wobei c die lokale Sedimentkonzentration darstellt. Die Schmidtzahl σ gibt das Verhältnis zwischen der Diffusivität des Sediments und der kinematischen Viskosität eines Fluids ν an.

Am oberen Rand, d.h. an der Wand, findet kein Stoffaustausch statt und es gilt die Randbedingung:

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial c}{\partial y} + w_s c = 0. \quad (2.15)$$

Direkt an der Sedimentoberfläche, d.h. an der Grenzfläche zwischen Sediment und Fluid, wird der Normalengradient der Konzentration $\partial c / \partial n$ mit Hilfe der Erosionsrate E und Sedimentationsrate S bestimmt. Es gilt:

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial c}{\partial n} + w_s c = S - \frac{E}{\rho_s}. \quad (2.16)$$

Das suspendierte Sediment wird im Kontinuum alleine durch seine Konzentration beschrieben. Hierbei wird der Sedimentpartikel als passiver Skalar betrachtet. Dies bedeutet, dass eine Wechselwirkung der Partikel auf die Strömung nicht modelliert wird. Da bei Riffelstrukturen in der Regel Sedimentkonzentrationen kleiner als 0,1% auftreten, kann diese Wechselwirkung vernachlässigt werden (Villaret & Davis 1988).

2.3 Sedimentationsrate

Mit Hilfe der Eulerschen Betrachtungsebene ist es möglich, die Konzentrationsverteilung im Strömungsgebiet zu berechnen. Somit kann auch die Konzentration in Bo-

dennähe und die damit verbundene Sedimentationsrate S bestimmt werden. Wird eine kritische Strömungsgeschwindigkeit unterschritten, wird der Partikel nicht mehr in Suspension weitertransportiert und lagert sich ab (Deposition bzw. Sedimentation).

Die Sedimentationsrate S (engl.: *settling term*) wird folgendermaßen bestimmt:

$$S = w_s c_0 \quad (2.17)$$

wobei c_0 die Konzentration an der Sedimentoberfläche darstellt. Die Versuchsergebnisse von Dreher (Dreher 2005) bestätigen die Annahme, dass der "*settling term*" immer mit betrachtet werden muss. Ob es in einem Gebiet zur Sedimentation kommt, hängt von den lokalen Strömungsbedingungen ab.

3 Phänomenologische Beschreibung der Riffelbildung

Bei einer Flusssohle aus kohäsionslosem Sediment bilden sich Sohlstrukturen (sogenannte Transportkörper) aus, wenn die durch die Strömung erzeugten Kräfte den vom Kornmaterial abhängigen Erosionswiderstand übersteigen. Generell sind diese Transportkörper nicht auf Wasserströmungen über kohäsionsloses Sediment begrenzt. 1888 hat bereits Hemholtz gezeigt, dass an der Phasengrenze zweier Fluide verschiedener Dichten Wellenstrukturen auftreten. Dies kann z.B. auf Wasseroberflächen beobachtet werden sowie bei der Formation von Wolkenriffeln. Im wasserbaulichen Ingenieurbereich sind diese Sohlstrukturen von großem Interesse, da sie einen wesentlichen Einfluss auf die Strömung nehmen und folglich die Sedimenttransportkapazität eines Fließgewässers beeinflussen.

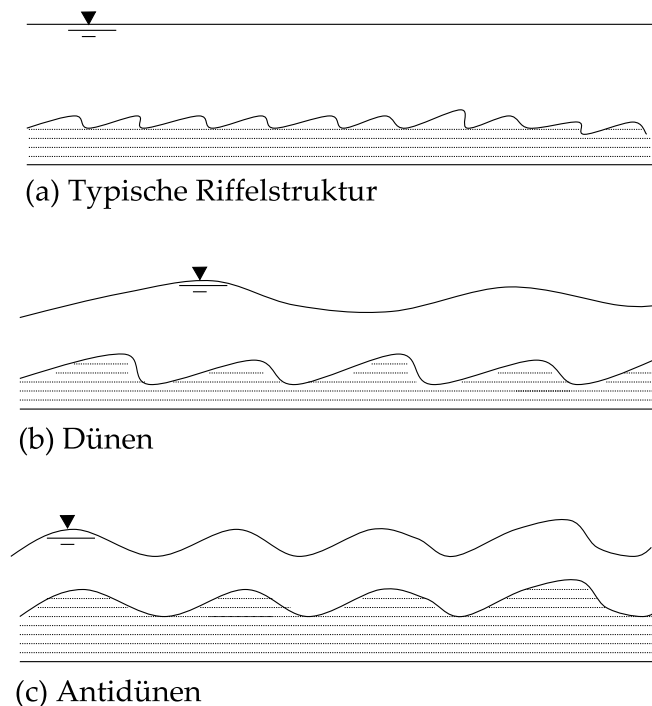


Abbildung 3.1: Schematische Skizzen von (a) Riffel, (b) Dünen und (c) Antidünen [verändert nach (Wallisch 1996)]

Grundsätzlich wird in der Literatur zwischen Riffel, Dünen und Antidünen unterschieden. Riffel und Dünen treten nur im unteren Fließregime ($Fr < 1$) auf. Eine eindeutige Trennung von Riffeln und Dünen ist nicht möglich, da der Übergang fließend ist. Obwohl Riffel und Dünen die gleiche Geometrie aufweisen, besitzen sie einen unterschiedlichen physikalischen Ursprung. Die Riffellänge wird maßgeblich von der

Korngröße des kohäsionslosen Sediments beeinflusst, wobei die Dünenlänge überwiegend durch die Fließtiefe bestimmt wird. Die Dünenhöhe ist von der Größenordnung der Fließtiefe und beeinflusst die Wasseroberfläche, die sich phasenverschoben gewellt ausbildet. Im Gegensatz hierzu ist die Riffelhöhe sehr klein zur Wassertiefe und die Riffel haben keinen Einfluss auf die Wasseroberfläche (siehe Abbildung 3.1).

Riffel treten auf, wenn die kritische Wandschubspannung ¹ nur minimal überschritten wird und die Sohle bei dieser Belastung ein hydraulisch glattes Verhalten aufweist (Engelund 1982). Ein solches Verhalten liegt vor, wenn der Durchmesser der Sandkörner kleiner als die Dicke der viskosen Unterschicht ist. Dünen entstehen hingegen, wenn bei Transportbeginn ein vollraues Verhalten vorliegt. Riffel entstehen nur bei geringen Wandschubspannungen und bei sehr feinen Sanden mit Korndurchmessern kleiner als $600\ \mu\text{m}$. Dünen hingegen bilden sich bei gröberen Sanden mit Durchmessern größer als $200\ \mu\text{m}$ aus. Es tritt offensichtlich ein Überlappungsbereich auf, wie in Abbildung 3.2 dargestellt.

Antidünen treten im oberem Fließregime ($Fr > 1$) auf. Sie sind symmetrischer (sinusförmiger) als Riffel und Dünen. Die Wasseroberfläche ist parallel zur Sohle.

Abbildung 3.2 verdeutlicht die Existenzregionen von Riffeln, Dünen und Antidünen in Abhängigkeit vom mittleren Korndurchmesser d_{50} und dem Produkt der Wandschubspannung τ_w und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v_m .

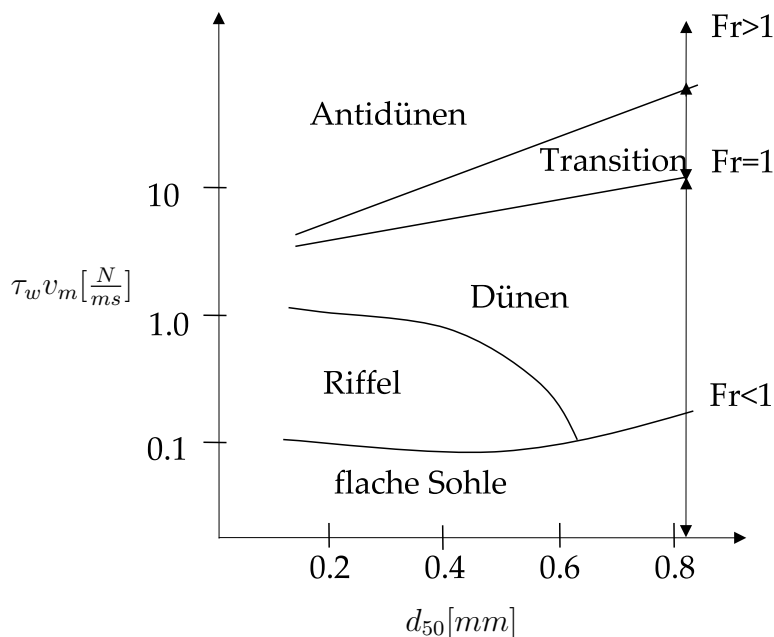


Abbildung 3.2: Existenzregionen von Riffeln, Dünen und Antidünen [verändert nach Simons et al. (Alexander 1980)]

In dieser Arbeit werden ausschließlich Riffelstrukturen näher untersucht, weshalb im Folgenden Dünen und Antidünen nicht weiter betrachtet werden.

¹die Wandschubspannung an der Sohle wird auch als Sohlschubspannung bezeichnet

3.1 Riffelentstehung

Bei der Entstehung von Riffelstrukturen wird die Sohlschubspannung durch eine instationäre Änderung schlagartig über die transportkritische Sohlschubspannung gesteigert. Aufgrund der Turbulenz wird die Sohloberfläche ungleichmäßig deformiert. Hierbei entstehen kleine, durchgehend gerade Kämme. Hinter den Kämmen entstehen quer zur Strömungsrichtung verlaufende Walzen, die den Bereich hinter dem Kamm eintiefen. Im weiteren zeitlichen Verlauf gehen diese geraden Kämme in eine gewellte Form über und die Strömungswalze im Leebereich bricht an einigen Stellen auf. Dadurch gehen die zweidimensionalen Strukturen in dreidimensionale sogenannte linguoide Strukturen über (siehe Abbildung 3.3).

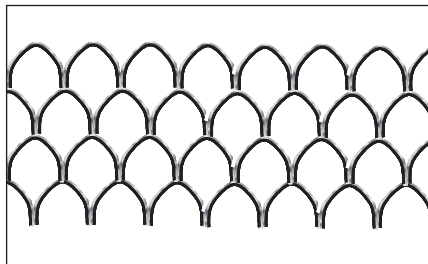


Abbildung 3.3: Draufsicht einer 3-dimensionalen Riffelstruktur

Bei der Entstehung von Riffeln kann man vom Anfangszeitpunkt ($t = 0$) bis zum Erreichen des Endzustands ($t = T_{end}$) zwei verschiedene Phasen des Riffelwachstums erkennen. In der Anfangsphase steigt die Steilheit (K/L) der Riffel, die über die Höhe K in Beziehung zur Länge L definiert (siehe Abb. 3.6) ist, sehr schnell an. In der zweiten Phase werden die Riffel zwar noch größer, aber die Geometrie (K/L) bleibt nahezu gleich. Die Größenentwicklung der Riffel in der zweiten Phase kann der Abbildung 3.4 entnommen werden.

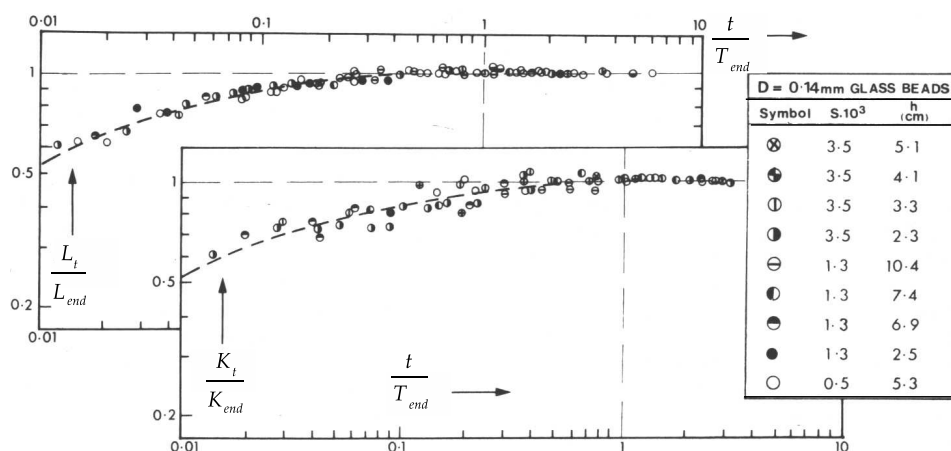


Abbildung 3.4: normierte zeitliche Entwicklung der Riffelhöhe und -länge nach Kühlborn

Die Verformung der Sohloberfläche ist ein interaktiver Prozess zwischen den Strömungsbedingungen und der momentanen Riffelstruktur. Bei stationären Strömungsbedingungen ist dieser Prozess irgendwann abgeschlossen und es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, bei dem sich die Transportkörper mit einer konstanten Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bewegen, ohne dabei ihre geometrische Form zu ändern. Die Zeit bis zum Erreichen des Endzustands variiert je nach Strömungsintensität und Sedimentzusammensetzung.

3.2 Geometrie voll ausgebildeter Riffel

Erosion und Sedimentation führen zu ungleichmäßigen Verformungen der Sohle, die sich umgekehrt auch auf die Strömung und die damit verbundene Sedimenttransportrate auswirken.

Riffel treten, wie bereits erwähnt, nur bei strömenden Gewässern und bei einem Korndurchmesser kleiner als $600 \mu m$ auf. Die Riffelgeometrie wurde in zahlreichen Experimenten untersucht. Van Rijn (van Rijn 1982) untersuchte den Einfluss des Korndurchmessers auf die Riffelhöhe. Primäres Ergebnis dieser Untersuchungen war, dass größere Sedimentkorndurchmesser höhere Riffel bilden. In den von Yalin (Yalin 1985) veröffentlichten Versuchsreihen wurden für mittlere Sedimentkorndurchmesser von $d_{50} = 100$ bis $200 \mu m$ durchschnittliche Riffelhöhen von $1,54 - 1,60 cm$ gemessen.

Yalin untersuchte auch den Zusammenhang zwischen dem so genannten Wandschubspannungsüberschuss (τ/τ_c) und der Riffelsteilheit ($K/L = \lambda$). Diese wird über das Verhältnis der vorhandenen Wandschubspannung τ zur kritischen Wandschubspannung τ_c beschrieben. Dabei fand Yalin heraus, dass Riffel nur dann gebildet werden, wenn die kritische Wandschubspannung überschritten wird ($\tau/\tau_c > 1$) und, dass sie bei $\tau/\tau_c > 14$ wieder verschwinden. Zwischen diesen beiden Werten ist ein parabolischer Verlauf der Riffelsteilheit λ zu verzeichnen, deren Maximalwert bei $\tau/\tau_c = 6,3$ liegt. Die maximale Riffelsteilheit λ beträgt nach seinen Untersuchungsergebnissen ca. 0,2 (siehe Abbildung 3.5).

Kühlborn (Kühlborn 1993) kann in seinen Versuchsreihen diesen Trend nicht beobachten. Er stellt fest, dass die Riffel auf erhöhte Wandschubspannungen mit größeren Wanderungsgeschwindigkeiten reagieren und nicht mit einer geometrischen Veränderung.

In der Literatur sind viele Angaben zu den zu erwartenden Riffellängen zu finden, die einen großen Streuungsbereich aufweisen. Die Riffellänge sowie die Riffelhöhe hängt im Wesentlichen von der Korngröße ab. Bei Yalin (Yalin 1985) liegt das Verhältnis der Riffellänge zum Korndurchmesser (L/d_{50}) zwischen 600 und 2000.

In Abbildung 3.6 erkennt man, dass die Querschnittsform eines Riffels durch einen leicht ansteigenden konvexen Luvhang und einem steil abfallenden Leehang gekennzeichnet wird. Der Leehang fällt etwa unter dem Winkel der inneren Reibung ab. Ein

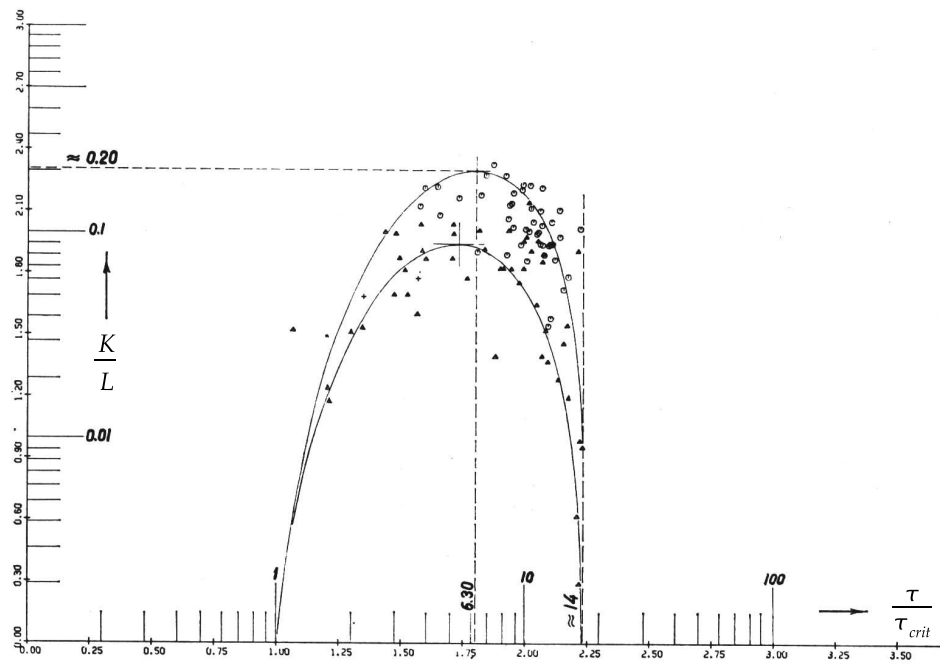


Abbildung 3.5: Verhältnis Steilheit zum Wandschubspannungsüberschuss

scharfer Kamm stellt die Verbindung der beiden Seiten dar. Dabei nimmt der Luvhang ca. 2/3 der Riffellänge ein (Allen 1968).

3.3 Strömung über Riffel

Bei der Überströmung einer Riffelstruktur kommt es zu einer druckinduzierten Ablösung mit Wiederanlegepunkt. Die Strömung über den Luvhang eines Riffels erfährt eine Beschleunigung, bei der Druckenergie in kinetische Energie umgesetzt wird. Der nachfolgende Leehang hingegen ist durch eine Verzögerung der Strömung gekennzeichnet, bei der die kinetische Energie der Teilchen wieder in Druckenergie umgewandelt wird. Durch die starken Reibungskräfte in der dünnen Grenzschicht verliert ein Grenzschichtteilchen so viel an kinetischer Energie, dass es im Bereich des Kammes den "Druckberg" nicht überwinden kann. Es kommt zum Stillstand und wird durch die Druckverteilung der äußeren Strömung rückwärts bewegt, die Strömung löst ab (Schlichting 1965).

Aufgrund der Rückströmung kommt es zu einer Verdickung der Grenzschicht, die mit einem Abtransport von Grenzschichtmaterial in die Außenströmung gekoppelt ist. An der Trennstromlinie existiert eine vertikale Geschwindigkeitskomponente, die die Strömung im Wendepunkt von der Sohle nach oben bewegt. Durch die wesentlich höhere Außenströmung bildet sich eine abgelöste Scherschicht aus, die sich etwa im unteren Drittel des stromabwärtsliegenden Luvhangs wieder anlegt. Somit entsteht ein geschlossenes Ablösegebiet, die sogenannte Rezirkulationszone (siehe Abbildung 3.6) (Simpson 1987).

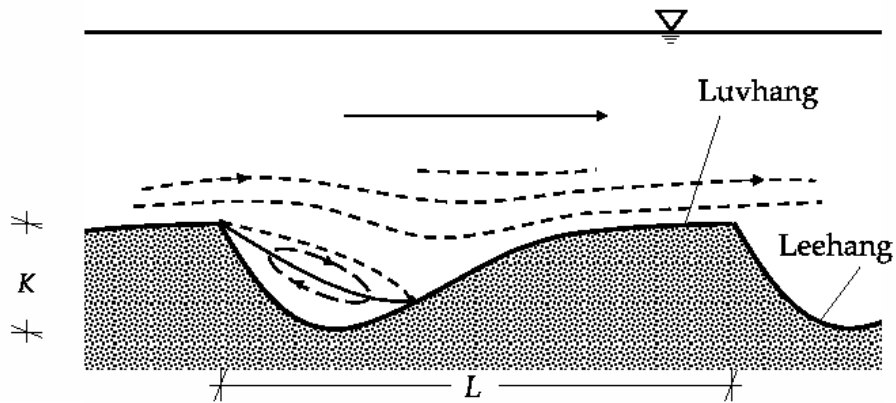


Abbildung 3.6: Strömung über Riffel

Die Ablösezone wird in verschiedenen experimentellen Arbeiten untersucht. Bei den Versuchen von Raudkivi (Raudkivi 1963), van Mierlo und Ruiters (van Mierlo & Ruiters 1988) sowie Karahan und Peterson (Karahan & Peterson 1980) wurden Rezirkulationszonen bestimmt, die etwa 5 Transportkörperhöhen² lang sind. Allerdings ist hier zu erwähnen, dass bei den Versuchen zweidimensionale Riffelkörpernachbildungen verwendet wurden.

Das Strömungsfeld wird nach Untersuchungen von Dyer (Dyer 1980) etwa bis zur dreifachen Riffelhöhe beeinflusst. Die freie Oberfläche wird aufgrund der geringen Riffelhöhe im Verhältnis zur Fließtiefe meist nicht beeinflusst.

Generell ist zu erwähnen, dass mit solchen Ablöseprozessen der Strömung ein erheblicher Anteil ihrer Energie entzogen wird. Die Riffelstruktur trägt so wesentlich zur Reduzierung der Transportkapazität bei.

3.4 Wanderung von Riffeln

Das Sediment am Luvhang erfährt durch die Strömung Wandschubspannungen, die über dem transportkritischen Wert liegen. Folglich wird es erodiert und stromabwärts transportiert. Das Material "rutscht" über den Kamm hinweg und lagert sich auf der Leeseite ab (Sedimentation). Gleichzeitig wird durch die Rezirkulationszone im unteren Bereich des Luvhangs je nach Strömungsintensität weiteres Sediment erodiert und stromaufwärts transportiert. Dieser Vorgang beschleunigt zusätzlich die Eigenbewegung der Riffel.

Fürbörter (Fürbörter 1983) hat bereits 1983 ein einfaches Modell aufgestellt, mit dem es möglich ist, die Riffelwanderung abzubilden. Dabei werden die Riffel vereinfacht als Dreiecke abgebildet (siehe Abbildung 3.7). Das in einer Zeiteinheit bewegte Volumen pro m Breite über die Krone wird als Feststoffstrom q_F definiert. Die Riffel-

²Die Bezeichnung Transportkörper geht auf die flussabwärts gerichtete Verlagerung der Riffel zurück.

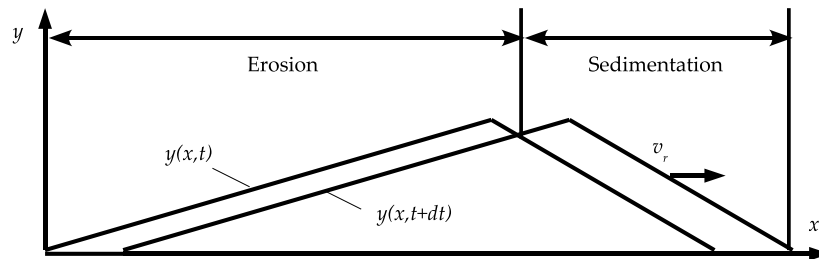


Abbildung 3.7: Kinematischer Ansatz der Transportkörperbewegung nach Fürböter (Fürböter 1983)

wanderungsgeschwindigkeit v_r wird über die von Exner 1920 hergeleitete Gleichung beschrieben:

$$v_r = \frac{q_F}{K}. \quad (3.1)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass unter gleichen Strömungsbedingungen die Fortschrittsgeschwindigkeit bei kleiner werdender Riffelhöhe K größer wird. Daraus kann gefolgert werden, dass sich stets die minimal mögliche Fortbewegungsgeschwindigkeit einstellt, da kleinere Riffel auf größere Riffel auflaufen und diese vergrößern, bis eine Endhöhe erreicht ist, die aufgrund der Strömungsbedingungen nicht mehr gesteigert werden kann. Kühlborn kann in seiner Arbeit bestätigen, dass dieses Modell, trotz vieler Vereinfachungen, in der Lage ist, das Wachstums- und Wanderungsverhalten von Riffeln gut zu beschreiben.

Dillo und Zanke (Kühlborn 1993) untersuchten Wanderungsgeschwindigkeiten an Riffeln und Dünen unter Laborbedingungen. Insgesamt untersuchten sie fünf verschiedene Sande unterschiedlicher Korngrößen und erlangten bei der Auswertung einen empirischen Zusammenhang zwischen der Wanderungsgeschwindigkeit und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit von $v_r = A * v_m^{6.4}$, wobei die Konstante A vom Korndurchmesser abhängt. Hierbei ist jedoch anzumerken, dass es sich bei den Transportkörpern teilweise um Dünen handelt und dass die Versuche unter instationären Bedingungen durchgeführt wurden und eine direkte Übertragung auf Riffel nicht möglich ist. Zanke vermutet, dass die bei instationären Strömungsverhältnissen auftretenden Wanderungsgeschwindigkeiten stets geringer als bei stationären Bedingungen sind, da der Transportkörper in erster Linie das Bestreben besitzt, die Riffelform den aktuellen Strömungsbedingungen anzupassen.

Kühlborn beobachtet bei seinen Laborversuchen, dass ein großer Unterschied zwischen einer ausgebildeten Riffelsohle und einer sich noch im Wachstum befindlichen Riffelsohle besteht. Eine im Endzustand befindliche Riffelsohle hat nach seiner Versuchsauswertung immer die gleiche Riffellänge und -höhe. Die Riffelsohle reagiert bei Strömungsänderungen nicht mit Änderungen der Riffelabmessung, sondern mit der Änderung der Wanderungsgeschwindigkeit.

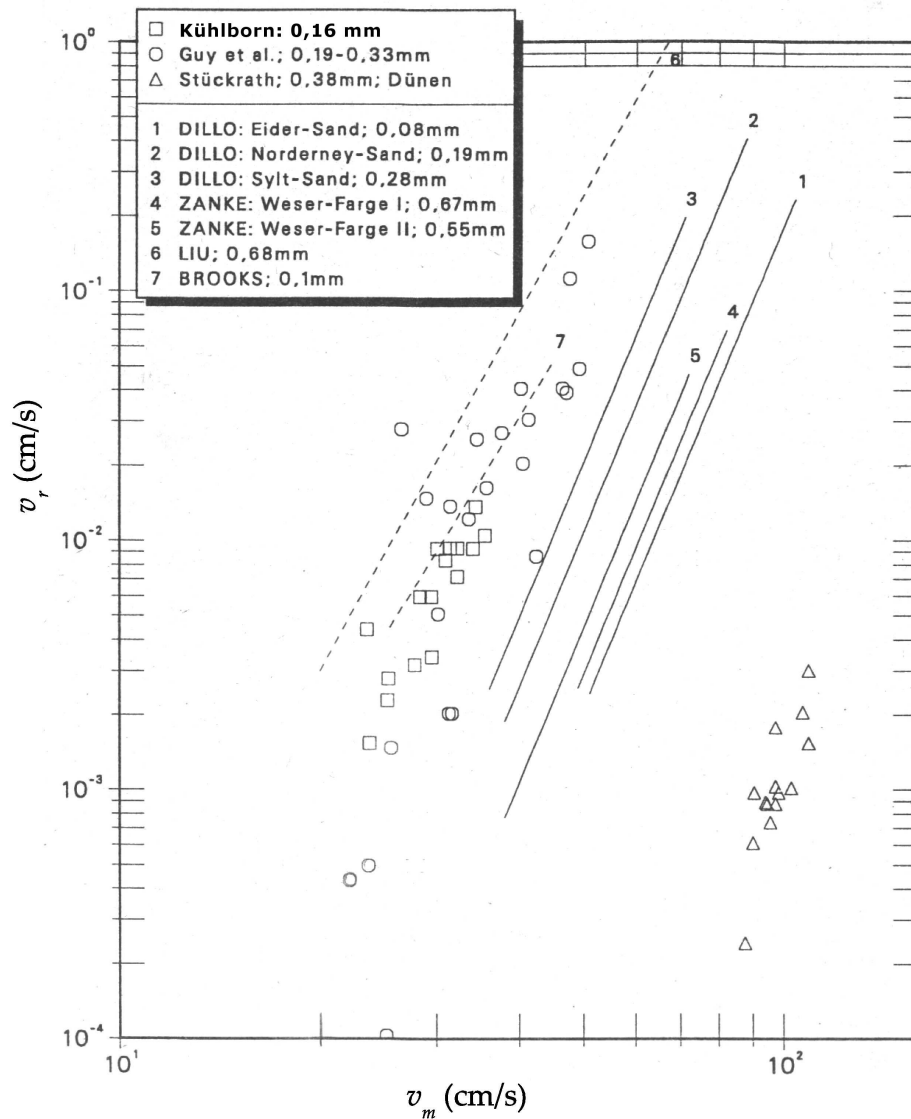


Abbildung 3.8: Wanderungsgeschwindigkeit von Riffeln und Dünen in Abhängigkeit zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit

Kühlborn bestätigt die Annahme, dass in der Wachstumsphase sich kleinere Riffel schneller bewegen als größere. Dies gilt jedoch nicht mehr für den Endzustand. Hier können Riffel derselben Abmessung, abhängig von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v_m unterschiedliche Wanderungsgeschwindigkeiten aufweisen.

4 Theoretische Grundlagen zur Berechnung turbulenter Strömungen

4.1 Navier-Stokes'sche Gleichungen

Die Navier-Stokes'schen Gleichungen sind benannt nach dem Briten George Gabriel Stokes und dem Franzosen Claude Louis Marie Henri Navier. Beide haben die Gleichung unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts hergeleitet (1827 bzw. 1845). Sie stellen die Grundgleichungen in der Strömungsmechanik dar. Sie gelten für Fluide, die als Kontinuum angenommen werden können und beschreiben dort die Geschwindigkeits- und Druckverteilung. Die Navier-Stokes'schen Gleichungen werden aus den Erhaltungsgleichungen für Masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

und Impuls

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

hergeleitet.

In den Gleichungen 4.1 und 4.2 stellen u_i die Komponenten des momentanen Geschwindigkeitsvektors, p den Druck und τ_{ij} den Cauchyschen Spannungsterm dar.

Für newtonische Fluide, bei denen die Scherspannung proportional zur Verzerrungsgeschwindigkeit ist, ist der Cauchysche Spannungsterm wie folgt definiert:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (4.3)$$

Das Kronecker Delta δ_{ij} ist definiert durch den Tensor

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

und μ beschreibt die dynamische Viskosität.

Bei einem inkompressiblen Fluid ergeben sich weitere Vereinfachungen. Der erste Term auf der linken Seite in Gleichung 4.1 und der zweite Term auf der rechten Seite

in Gleichung 4.3 werden zu Null. Durch Einsetzen der Gleichung 4.3 in die Impulsgleichung (4.2) ergeben sich die folgenden Navier-Stokes'schen Gleichungen:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (4.6)$$

wobei der Druck P durch die Dichte ρ geteilt ist. Detaillierte Herleitungen können der Literatur (z.B. Pope 2000) entnommen werden.

4.2 Turbulenz

Die in der Natur vorkommenden Strömungen werden in laminare und turbulente Strömungen eingeteilt. Laminare und turbulente Strömungen unterscheiden sich in ihren Strömungseigenschaften. Die Bahnlinien einer laminaren Strömung sind regelmäßig und geordnet. In turbulenten Strömungen beschreibt ein Fluidpartikel chaotische Bahnen, welche durch hochfrequentierte räumliche und zeitliche Schwankungen der Strömungsgrößen gekennzeichnet sind (siehe Abb. 4.1).

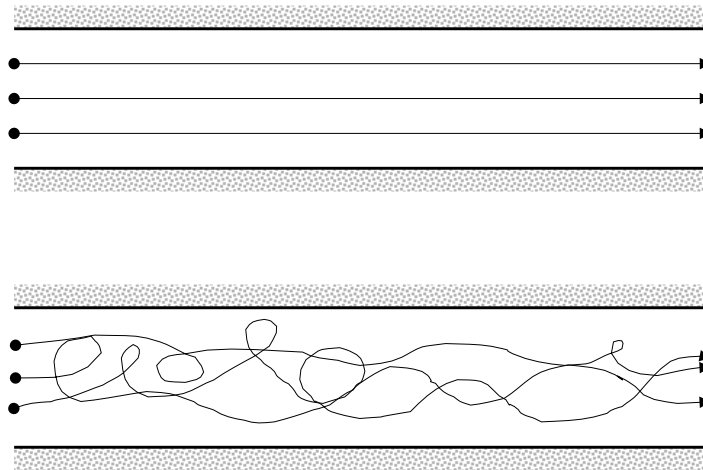


Abbildung 4.1: Bahnlinien einer laminaren (oben) und einer turbulenten Strömung (unten)

Als Kennzahl für turbulente bzw. laminare Strömungen dient die Reynoldszahl. Sie stellt eine dimensionslose Kenngröße dar, die das Verhältnis zwischen den Trägheitskräften und den Reibungskräften beschreibt,

$$Re = \frac{U \cdot D}{\nu}. \quad (4.7)$$

Hierbei ist U die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit, D die charakteristische Länge und ν die kinematische Viskosität. Strömungen mit hohen Reynoldszahlen sind turbulent.

Nach Rotta (Rotta 1974) kann man turbulenten Strömungen folgende Eigenschaften zuordnen:

- Turbulente Strömungen sind dreidimensional.
- Turbulente Strömungen sind instationär.
- Turbulente Strömungen sind rotationsbehaftet.
- Turbulente Strömungen sind diffusiv. Das bedeutet, dass sie gute Mischungseigenschaften gegenüber laminaren Strömungen besitzen.
- Turbulente Strömungen sind dissipativ. Das bedeutet, dass sie die Strömungsenergie in Wärme umwandeln.
- Turbulente Strömungen sind stochastisch. Folglich muss ein instationäres Geschwindigkeitsprofil als Zufallsereignis, welches nicht experimentell reproduziert werden kann, angesehen werden.

4.2.1 Skalen der Turbulenz

Eine turbulente Strömung setzt sich aus vielen Wirbeln verschiedener Größenordnungen zusammen. Hierbei wird angenommen, dass ein Energietransport in Form einer Energiekaskade von den großen zu den kleinen Längenskalen stattfindet. Die von den großen Skalen produzierte turbulente Energie wird jeweils nur zur nächst kleineren Turbulenzskala übertragen. Diese geben sie wieder ihrerseits an die nächst kleineren Skalen ab. Mit kleiner werdenden Abmessungen wachsen jedoch die viskosen Kräfte. Somit ist das Ende der Energiekaskade erreicht, wenn die weitertransportierte Energie von den kleinen Skalen aufgrund der Wirkung der viskosen Kräfte dissipiert wird (siehe Abb.4.2) (Richardson 1922).

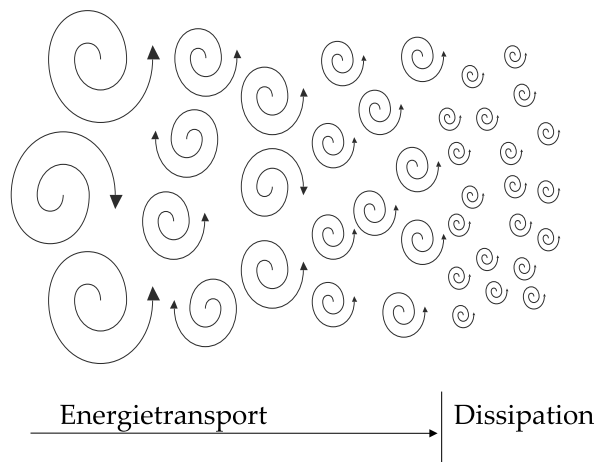


Abbildung 4.2: Prinzip der Energiekaskade

Ein Maß für die verschiedenen Längenskalen stellt die Wellenzahl k dar. Die kleinsten Turbulenzballen werden auch als Kolmogorov-Skalen bezeichnet und lassen sich aus der Dimensionsanalyse herleiten (Kolmogorov 1941). Für die Kolmogorov-Länge η_k erhält man

$$\eta_k = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (4.8)$$

und für die Kolmogorov-Zeit τ_k

$$\tau_k = \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}, \quad (4.9)$$

wobei ϵ die Dissipationsrate der Turbulenzenergie darstellt.

Das Energiespektrum einer voll entwickelten turbulenten Strömung weist im Inertialbereich eine Proportionalität zu $k^{-5/3}$ auf (siehe Abbildung 4.3). Somit lässt sich ein Verhältnis der großen Längenskalen L zur kleinsten Kolmogorov-Länge η_k abschätzen. Sie beträgt etwa:

$$L/\eta_k \sim Re^{3/4} \quad (4.10)$$

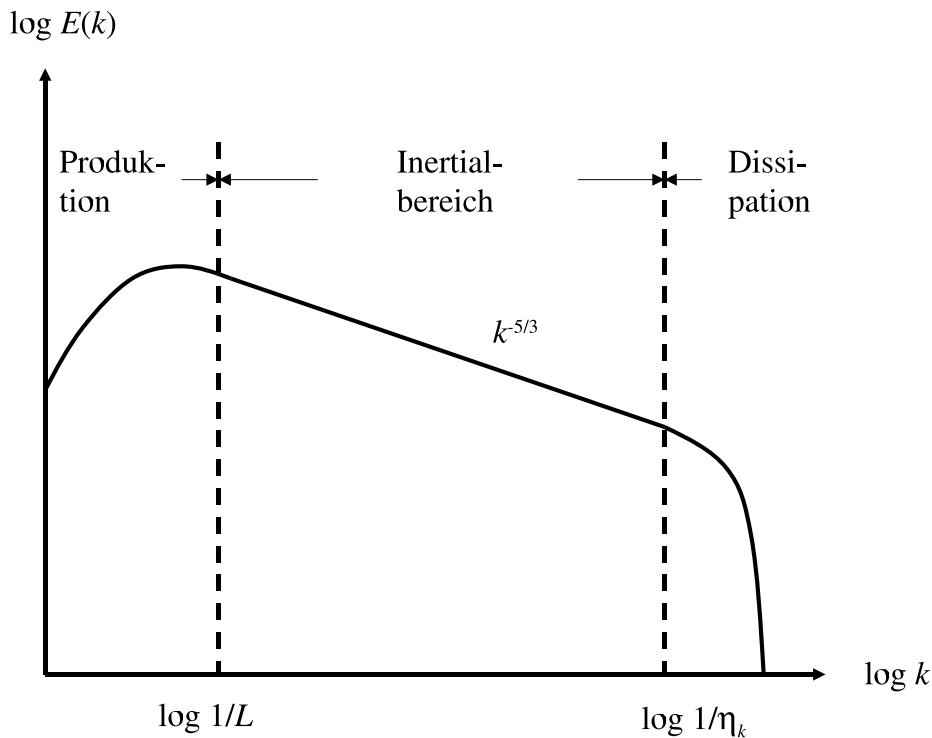


Abbildung 4.3: Energiespektrum einer turbulenten Strömung

4.2.2 Reynoldsmittelung

In vielen technischen Anwendungen ist es gar nicht von Interesse, eine physikalische Größe vollständig bezüglich aller ihrer in Raum und Zeit vorliegenden Schwankungen zu kennen. Hier sind oft nur die gemittelten Strömungsgrößen und die daraus resultierenden Kräfte von Bedeutung. Aus diesem Grund entstand die Idee der Reynoldsmittelung. Osborne Reynolds untersuchte Ende des 19. Jahrhunderts, wie sich die Navier-Stokes-Gleichungen unter Mittelung verhalten. Man spricht in diesem Fall von der Reynoldsschen Zerlegung der Navier-Stokes-Gleichung (siehe auch Kapitel 5.2). An dieser Stelle werden die Grundlagen der Reynoldsschen Zerlegung beschrieben.

Bei der Mittelung einer physikalischen Größe unterscheidet man zwischen zwei verschiedenen Arten von Mittelungen, der zeitlichen Mittelung und der ensemble Mittelung.

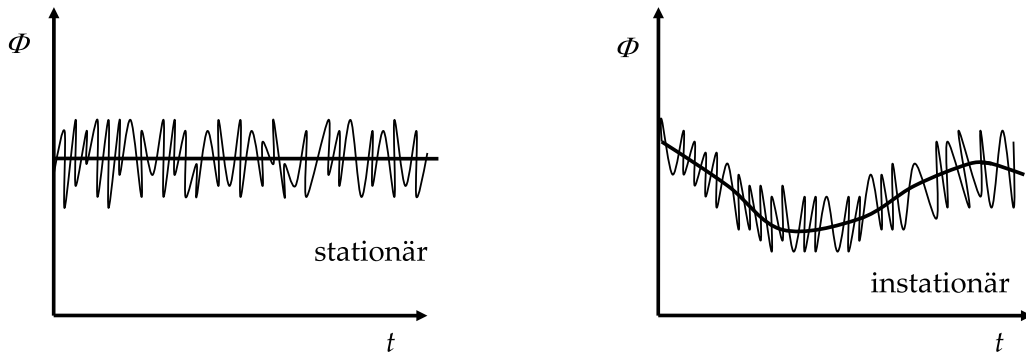


Abbildung 4.4: zeitliche Mittelung (links) und ensemble Mittelung (rechts) einer physikalischen Größe

Bei der zeitlichen Mittelung wird eine physikalische Größe an einem festen Ort über einen unendlich langen Zeitraum gemittelt

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \phi(\mathbf{x}, t) dt, \quad (4.11)$$

so dass der Mittelwert keine Schwankungen mehr aufweist. Durch diese Art der Mittelung geht die Zeitabhängigkeit verloren. Somit ist die zeitliche Mittelung nur für stationäre Phänomene geeignet.

Bei instationären Prozessen bietet sich die ensemble Mittelung an. Hier wird eine physikalische Größe an einem festen Ort und zu einer festen Zeit über N identische Experimente gemittelt

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(\mathbf{x}, t). \quad (4.12)$$

Somit werden fluktuationsunabhängige, aber zeitabhängige Mittelwerte gebildet. Die zwei verschiedenen Mittelungsarten werden in Abbildung 4.4 nochmals verdeutlicht.

Wie in Abbildung 4.4 zu erkennen ist, kann man grundsätzlich eine physikalische Größe in einen Mittelwert und in einen Schwankungswert zerlegen

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (4.13)$$

Ebenfalls ist auch aus den Abbildungen ersichtlich, dass die Mittelung des Mittelwertes wieder zum Mittelwert führt

$$\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi} \quad (4.14)$$

und dass der Mittelwert der Fluktuation zu null wird

$$\overline{\phi'} = 0, \quad (4.15)$$

da sich die Fluktuationen gegenseitig aufheben. Ferner gilt, dass die Ableitung einer gemittelten Größe gleich der Mittelung einer Ableitung der instationären Größe ist

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}. \quad (4.16)$$

Ebenso gilt, dass jede Mittelung einer Linearkombination von physikalischen Größen die Linearkombination der Mittelwerte ergibt. Werden jedoch Produkte zweier physikalischer Größen betrachtet, kann dies nicht beobachtet werden. Hier gilt **nicht**

$$\overline{\phi_1 \phi_2} = \bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2. \quad (4.17)$$

Die weitreichenden Auswirkungen dieses Sachverhaltes werden in Kapitel 5.2 ausführlich behandelt.

5 Numerische Simulation turbulenter Strömungen

Die in Kapitel 4 erläuterten Navier-Stokes-Gleichungen können jedoch nur für einen sehr kleinen Teil der vorhandenen Problemstellungen der Strömungsmechanik analytisch gelöst werden. Für alle weiteren Strömungsprobleme müssen die Erhaltungsgleichungen numerisch behandelt werden. Neben der direkten numerischen Simulation (DNS), d.h. heißt der Simulation aller turbulenten Skalen, gibt es das Gebiet der Turbulenzmodellierung, die auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (engl.: *Reynolds-averaged Navier-Stokes [RANS]*) basiert. Zwischen diesen beiden Methoden existiert die Grobstruktursimulation (engl.: *Large Eddy Simulation [LES]*). Diese drei verschiedenen Methoden werden in diesem Kapitel vorgestellt.

5.1 Direkte Numerische Simulation

Die Direkte Numerische Simulation ist die genaueste Methode zur Berechnung von Strömungen. Hierbei werden die Navier-Stokes Gleichungen vollständig ohne Modellannahmen gelöst. Der einzige Fehler der Berechnung ist im numerischen Verfahren begründet. Die Diskretisierung muss bei der DNS in allen drei Raumrichtungen **und** in der Zeit fein genug sein, um die kleinsten Skalen erfassen zu können. Da für das Verhältnis der größten zu den kleinsten Längenskalen $l_o/\eta \sim Re^{3/4}$ und für die Zeitskalen $t_o/\tau_\eta \sim Re^{1/2}$ gilt, wächst der numerische Aufwand mit der Reynoldszahl im Verhältnis $Re^{11/4}$ an. Da technisch relevante Strömungen meist sehr hohe Reynoldszahlen aufweisen, wird es auch in den nächsten Jahren nicht möglich sein diese Strömungen direkt numerisch zu berechnen. Zurzeit können mit den zur Verfügung stehenden Hochleistungsrechnern einfachste Geometrien wie z.B. eine Kanalströmung bis zu einer Reynoldszahl von ca. 25000 direkt numerisch gelöst werden.

5.2 RANS

Die Grundlage der statistischen Turbulenzmodellierung basiert auf Osborne Reynolds zurückgehende Idee, alle in den Kontinuitäts- und Navier-Stokes Gleichungen vorkommenden Größen in einen Mittelwert \bar{u} und einen Schwankungswert u' zu zerlegen (siehe Kapitel 4.2.2). Unter Anwendung dieser Zerlegung und der zeitlichen Mittelung erhält man die Reynolds-gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.1)$$

und die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}. \quad (5.2)$$

Durch den Mittelungsprozess entsteht der Reynoldsche Spannungstensor $\overline{u'_i u'_j}$, wodurch das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen ist. Das Gleichungsmodell muss also mittels Turbulenzmodellen geschlossen werden. Diese lassen sich nach der Modellierungsart des Spannungstensors klassifizieren.

Die Ansätze zur RANS-Modellierung lassen sich grundsätzlich in Wirbelviskositätsmodelle und Reynoldsspannungsmodelle unterteilen. Der von Boussinesq formulierte Wirbelviskositätsansatz modelliert die turbulenten Spannungen in den Impulsgleichungen durch eine erhöhte Viskosität im Diffusionsterm, die sogenannte Wirbelviskosität. Diese variiert räumlich und zeitlich als Funktion der Strömung. Deshalb ist es erforderlich, sie mittels eines Turbulenzmodells zu berechnen. Wirbelviskositätsmodelle werden nach der Anzahl der zusätzlichen Transportgleichungen in Nullgleichungs-, Eingleichungs-, Zweigleichungs- und Mehrgleichungsmodelle unterschieden.

Das am häufigsten verwendete Modell ist ein Zweigleichungsmodell mit Gleichungen für die kinetische Energie k und die turbulente kinetische Dissipationsrate ϵ . Das k - ϵ -Modell wurde 1972 von Launder und Spalding entwickelt (Launder & Spalding 1972). Der große Erfolg des Modells ist wohl dem relativ geringen Rechenaufwand und der hohen numerischen Stabilität zuzuschreiben. Schwächen hat das Modell allerdings bei komplexen Strömungen. Anisotropien in der Turbulenz sowie spezielle Effekte, z.B. Rotationen in der Strömung können nicht modelliert werden (Speziale 1995).

Ein weiteres häufig verwendetes Zweigleichungsmodell ist das k - ω -Modell. Dieses Modell ist hauptsächlich aus den Arbeiten von Wilcox (Wilcox 1998) bekannt. Grundlage sind aber die Arbeiten von Kolmogorov (Kolmogorov 1941). Im Vergleich zu dem k - ϵ -Modell wird die ϵ -Gleichung in eine ω -Gleichung überführt. Dies führt zu besseren Vorhersagen in Wiederanlegezonen hinter Grenzschichtablösungen.

In der Nähe von Wänden wird bei Wirbelviskositätsmodellen die Verwendung einer Wandfunktion notwendig, da die Voraussetzung der Isotropie der Turbulenz und die Vernachlässigung der molekularen Viskosität hier nicht mehr erfüllt wird. Als Grundlage für die Wandfunktion dient das logarithmische Wandgesetz (Schlichting 1965). Dieses lässt sich durch Ähnlichkeitsbetrachtungen oder aus dem Prandtlschen Mischungsweggesetz für eine längsangeströmte, ebene Platte herleiten.

Weitere Ansätze zur Modellierung verwenden die Transportgleichungen der turbulenten Spannungen. Reynoldsspannungsmodelle berechnen diese Differentialgleichungen, in denen aber wieder neue Terme auftreten, welche modelliert werden müssen. Mit diesen Modellen können genauere Ergebnisse als mit den Wirbelviskositätsmodellen erzielt werden. Der Rechenaufwand ist jedoch deutlich größer und die Stabi-

lität der Berechnung ist geringer. Bei algebraischen Reynoldsspannungsmodellen werden diese Transportgleichungen so vereinfacht, dass algebraische Ausdrücke zur Berechnung der Reynoldsspannungen zur Verfügung stehen. Eine gute Beschreibung dieser Modelle liefert Rotta (Rotta 1974).

5.3 Large Eddy Simulation

Die Methode der LES basiert auf dem Konzept der Kolmogorovschen Energiekaskade (siehe Kapitel 4).

Die LES macht sich zu Nutze, dass die großen und kleinen Skalen verschiedene Eigenschaften besitzen. Die großen Skalen sind abhängig von der Geometrie und den Randbedingungen. Sie zeichnen sich durch Inhomogenität und Anisotropie aus. Ebenso sind sie energiereich und langlebig. Die kleinen Skalen hingegen entstehen aus den großskaligen Strukturen und sind kurzlebig und energiearm. Ihre Strukturen sind weitgehend homogen und isotrop. Daraus resultiert die Idee, die kleinen Skalen mit Hilfe eines universellen Modelles abzubilden. Das Prinzip der LES besteht darin, die großen Skalen direkt numerisch zu berechnen und die kleinen Skalen mit Hilfe eines sogenannten Feinstrukturmodelles (*engl.: subgrid scale model*) abzubilden. Somit löst die LES im Gegensatz zur Direkten Numerischen Simulation nicht alle turbulenten Zeit- und Längenmaße auf, sondern nur bis zu einer bestimmten Wellenlänge (siehe Abbildung 5.1). Folglich liegt die LES zwischen der RANS-Modellierung und der Direkten Numerischen Simulation.

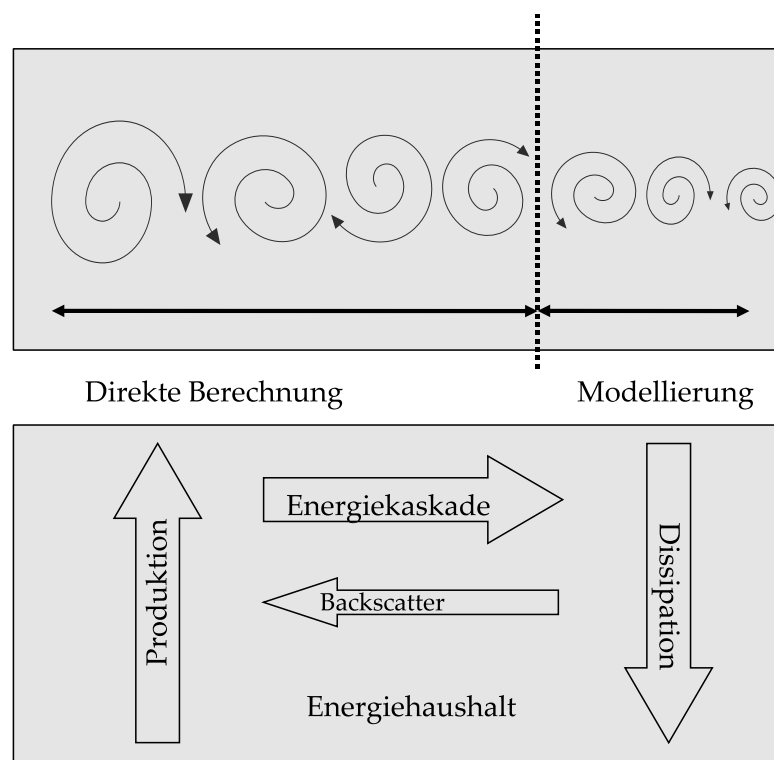


Abbildung 5.1: Prinzip der LES Modellierung

Da bei der LES nur die großen energietragenden Skalen aufgelöst werden und die kleinen Skalen modelliert werden, muss eine Aufspaltung der physikalischen Größen in einen Grobstrukturanteil $\bar{\phi}$ und in einen Feinstrukturanteil ϕ' stattfinden:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (5.3)$$

Mathematisch lässt sich das durch eine räumliche Filterung der physikalischen Größe ϕ herleiten:

$$\bar{\phi} = \int_V G(x_i, x'_i) \phi(x'_i) dx'_i, \quad (5.4)$$

wobei $G(x_i, x'_i)$ die Filterfunktion darstellt.

Wendet man diese Filterung auf die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichungen an, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}. \quad (5.6)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, wird der nichtlineare Term in Gleichung (5.6) mit Hilfe von Gleichung (5.7) ausgedrückt

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \tau_{ij}, \quad (5.7)$$

τ_{ij} beschreibt den Effekt der nicht aufgelösten kleinen Skalen auf die großen Skalen. Folglich können die gefilterten Navier-Stokes-Gleichungen folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (5.8)$$

Die Feinstrukturspannungen τ_{ij} müssen modelliert werden um Gleichung (5.8) zu schließen.

Bei der LES tritt somit, wie bei der RANS-Rechnung, ein ungeschlossener Term auf, der Feinstrukturtensor. Dieser besitzt jedoch physikalisch gesehen eine andere Bedeutung als der bei der RANS-Rechnung auftretende Scheinspannungstensor. Während bei der LES der Einfluss der kleinskaligen Turbulenz auf das Grobstrukturfeld beschrieben wird, beschreibt der Scheinspannungstensor den Impulstransport der Turbulenzbewegungen. Das charakteristische Längenmaß, welches bei der RANS-Rechnung eine der Hauptschwierigkeiten beschreibt, wird bei der LES durch die Filter-

weite beschrieben. Somit nähert sich die LES Rechnung bei kleiner werdender Gitterweite kontinuierlich der DNS Lösung an. Für gute Ergebnisse müssen bei der LES Rechnung im gesamten Strömungsgebiet ca. 80% der Gesamtenergie aufgelöst werden.

Das bekannteste Feinstrukturmodell wurde bereits 1963 von Smagorinsky formuliert. Es gehört noch heute zu den am häufigsten angewendeten Modellen. Es basiert auf dem Wirbelviskositätsansatz, welches die Feinstrukturspannungen τ_{ij} zu dem großskaligen Scherspannungstensor \overline{S}_{ij} in Beziehung setzt. Als Proportionalitätsfaktor gilt die turbulente Viskosität ν_t :

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} \quad (5.9)$$

mit

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.10)$$

Die turbulente Viskosität ν_t lässt sich aus dem Prandtl Mischungsweg Ansatz herleiten, wobei die turbulente Viskosität ν_t zum Betrag der lokalen großskaligen Geschwindigkeitsgradienten in Bezug gesetzt wird:

$$\nu_t = l^2 |\overline{S}_{ij}|, \quad (5.11)$$

dabei gilt

$$|\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}. \quad (5.12)$$

Das Längenmaß l steht charakteristisch für die kleinen Skalen und wird gebildet aus der Smagorinsky-Konstante C_S und der Filterweite Δ

$$l = C_S \Delta. \quad (5.13)$$

Für die Filterweitenberechnung gibt es mehrere Möglichkeiten. Im Folgenden werden die drei am häufigsten verwendeten Definitionen vorgestellt.

$$\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{\frac{1}{3}} \quad (5.14)$$

$$\Delta = (\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

$$\Delta = \max \{ \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z \} \quad (5.16)$$

Problematisch ist die Bestimmung der Smagorinsky-Konstante für verschiedene Geometrien. Je nach Strömungsgebiet liegt die Smagorinsky-Konstante zwischen 0,065 und 0,2. Hierzu kommt ein Versagen des Smagorinsky-Modells in Wandnähe. In diesem Bereich muss die Smagorinsky-Konstante reduziert werden, da mit Annäherung an feste Wände die Geschwindigkeitsschwankungen gegen Null konvergieren. Daher wird in Wandnähe die Van-Driest Dämpfungsfunktion angewendet (Van Driest 1956). Somit gilt für die Feinstrukturlänge l im wandnahen Bereich folgende Gleichung

$$l = C_S \Delta \left(1 - e^{(-y u_\tau / 25 \nu)^3}\right)^{0.5}. \quad (5.17)$$

Allerdings liefert dieser Ansatz nur gute Ergebnisse, wenn der Wandbereich fein genug aufgelöst wird. Durch die positive Konstante ist es nicht möglich "backscatter"-Effekte zu beschreiben. Außerdem zeigt Oberlack (Oberlack 1997), dass das Smagorinsky-Modell die Skaleninvarianz bricht, da die Filterweite Δ als Längenmaß genutzt wird. Diese steht aber nicht im Zusammenhang mit dem turbulenten Längenmaß.

Germano et al. (Germano, Piomelli, Moin & Cabot 1991) entwickelten den Ansatz, die Smagorinsky-Konstante dynamisch zu bestimmen. Dafür wurde ein sogenannter Testfilter eingeführt, dessen Filterweite $\tilde{\Delta}$ größer ist als die Gitterweite Δ . Ein gängiges Verhältnis Testfilterweite zu Gitterweite beträgt $\tilde{\Delta}/\Delta = 2$. Physikalische Größen, auf die der Testfilter angewandt wird, werden mit einer Tilde gekennzeichnet. Die sich zwischen dem Testfilter und der Gitterweite befindlichen Skalen werden über die Germano Identität L_{ij} definiert.

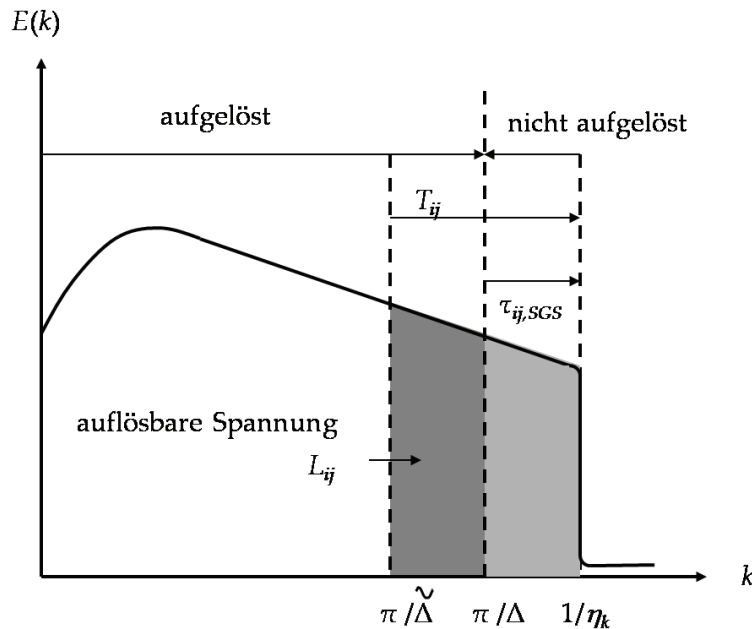


Abbildung 5.2: Prinzip des Germano Modells

$$L_{ij} = T_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \quad (5.18)$$

mit

$$\tilde{\tau}_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} \quad (5.19)$$

und

$$T_{ij} = \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widetilde{\bar{u}_i} \widetilde{\bar{u}_j}. \quad (5.20)$$

Dahinter steckt die Annahme, dass die kleinsten durch das Gitter aufgelösten Skalen den nicht aufgelösten Skalen ähnlich sind. Grundsätzlich kann das Germano-Modell bei jedem beliebigen algebraischen Feinstrukturmodell mit einer Modellkonstante angewendet werden. Die Prozedur wird im Folgenden anhand des Smagorinsky-Modells erläutert.

Der Feinstrukturtensor τ_{ij} des Gitterfilters und der Feinstrukturtensor T_{ij} des Testfilters werden wie folgt berechnet:

$$\tau_{ij} = -2(C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (5.21)$$

$$T_{ij} = -2(C_s \tilde{\Delta})^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \quad (5.22)$$

Wendet man nun die Germano Identität an, ergibt sich folgende Beziehung

$$L_{ij} = 2(C_s \tilde{\Delta})^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - 2(C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (5.23)$$

Um die Konstante C_s berechnen zu können, muss sie aus der Testfilterung herausgezogen werden. Dies ist mathematisch nur korrekt, wenn die Testfilterung der Konstante keinen Einfluss auf die Modellparameter besitzt. Da dies jedoch nicht der Fall ist, besitzt das Germano-Modell einen gewissen Fehler, der jedoch vernachlässigt wird. Unter dieser Annahme ergibt sich der Ausdruck

$$L_{ij} = -2(C_s \Delta)^2 M_{ij} \quad (5.24)$$

mit

$$M_{ij} = \frac{\tilde{\Delta}^2}{\Delta^2} |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (5.25)$$

Da bei dem Germano-Modell auch negative Werte für die Konstante zugelassen werden sollen, um "backscatter"-Effekte berechnen zu können, wird die folgende Definition für die Germanokonstante C eingeführt.

$$C = C_s^2 \quad (5.26)$$

Lilly (Lilly 1992) schlägt vor, die Germanokonstante über die Minimierung des Fehlers der folgenden Gleichung zu bestimmen

$$Q = (L_{ij} - 2C\Delta^2 M_{ij})^2. \quad (5.27)$$

Mit $\partial Q/\partial C = 0$ erhält man die Definition

$$C = \frac{L_{ij}M_{ij}}{2M_{ij}M_{ij}}. \quad (5.28)$$

Da die Germanokonstante negative Werte annehmen kann und räumlich stark variiert, was zu numerischen Instabilitäten führen kann, schlägt Germano et al. (Germano et al. 1991) vor, den Zähler und Nenner bei der Ermittlung der Konstante in homogene Richtungen zu mitteln.

Die Vorteile des Germano Modells sind somit eindeutig erkennbar. Die Konstante passt sich je nach Strömungseigenschaften räumlich dynamisch an. Somit ist keine Dämpfungsfunktion im Wandbereich nötig. Ebenso ist gewährleistet, dass in laminaren Strömungen keine turbulente Viskosität auftritt. Außerdem kann die Konstante räumlich begrenzt negative Werte annehmen und somit den "backscatter"-Effekt beschreiben. Durch die Art der Bestimmung des Längenmaßes wird im Gegensatz zum Smagorinsky-Modell die Skaleninvarianz nicht gebrochen (Oberlack 1997).

Aufgrund der genannten Vorteile wird im Rahmen dieser Arbeit mit dem Germano-Modell gerechnet.

Wendet man die Filterung auf die Konzentrationsgleichung 2.14 an, erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + (\bar{u}_i - w_s \delta_{j3}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i^2} - \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i}, \quad (5.29)$$

wobei

$$\chi_i = \overline{u_i c} - \bar{u}_i \bar{c} \quad (5.30)$$

den skalaren Feinstrukturfluss darstellt, der modelliert werden muss. Dazu kann der Gradientenflussansatz von Eidson (Eidson 1985) verwendet werden:

$$\chi_i = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i}, \quad (5.31)$$

wobei σ_t die turbulente Schmidtzahl ist.

Strömungen in Wandnähe unterscheiden sich wesentlich von freien Strömungen. Deshalb müssen diese bei der LES gesondert betrachtet werden. Die im Wandbereich auftretenden Strukturen sind wesentlich kleiner als im übrigen Strömungsgebiet, außerdem ist im Wandbereich die Annahme der Homogenität und Isotropie der klei-

nen Skalen nicht mehr gewährleistet. Aufgrund der geltenden Haftbedingung an der Wand entstehen senkrecht zur Wand starke Geschwindigkeitsgradienten. Um diese auflösen zu können, müssen sich bei der LES mehrere Gitterpunkte (≤ 5) in der viskosen Unterschicht ($0 \leq y^+ \leq 5$) befinden und der erste Gitterzellenpunkt bei $y^+ \approx 1$ liegen (Breuer 2001), wobei der dimensionslose Wandabstand y^+ mit

$$y^+ = \frac{y \cdot u_\tau}{\nu} \quad (5.32)$$

definiert ist. Im Gegensatz zu den RANS-Rechnungen reicht es nicht aus, den Wandbereich nur vertikal zur Wand sehr fein aufzulösen. Dieser muss in Wandnähe auch in die beiden anderen Raumrichtungen sehr fein aufgelöst werden, da sonst die kleinskalige Turbulenz nicht richtig erfasst werden kann. Diese Bedingungen müssen erfüllt sein, um die korrekte Turbulenzproduktion in Wandnähe berechnen zu können, da der Wandbereich maßgeblich an der Turbulenzproduktion beteiligt ist. Wird dieser Bereich nicht richtig abgebildet, werden die Reynoldsspannungen unterschätzt, was zu einer zu geringen Wandschubspannung führt. Die Anzahl der Gitterpunkte ist dementsprechend an die Reynoldszahl gekoppelt. Man spricht bei der wandaufgelösten LES auch von einer sogenannten "Quasi DNS". Dies bedeutet, dass bei technisch relevanten Strömungen mit hohen Reynoldszahlen bis zu $1/3$ der gesamten Gitterpunkte im Wandbereich liegen und für eine adäquate Auflösung des Strömungsgebiets extrem viele Gitterpunkte benötigt werden (Breuer 2001).

6 Grundlagen des numerischen Berechnungscodes

Für die in der Arbeit durchgeführten Strömungssimulationen wird der CFD-Code FASTEST-3D (Flow Analysis Solving Transport Equations Simulation Turbulence 3 Dimensional) verwendet. Das Programm FASTEST-3D ist ein Finite Volumen Code, basierend auf Hexaedern im dreidimensionalen Raum. Es werden bei diesem Code randangepasste, blockstrukturierte Gitter verwendet. Die Anwendung nicht orthogonaler Gitter ist möglich, da für jedes Kontrollvolumen (KV) ein lokales Koordinatensystem definiert ist und eine Transformation in das globale Koordinatensystem vorgenommen wird. Die Zeitdiskretisierung wird mit dem Crank-Nicolson-Verfahren durchgeführt. Eine Kopplung zwischen dem Druckfeld und den Geschwindigkeitskomponenten ist durch das SIMPLE-Verfahren hergestellt. Zum Lösen der Erhaltungsgleichungen wird der SIP-Solver verwendet (FASTEST 2001).

6.1 Finite Volumen Diskretisierung

Um die Navier-Stokes-Gleichungen mit FASTEST-3D lösen zu können, wird das Gebiet mit der Finite Volumen Methode räumlich diskretisiert. Diese Finite Volumen Diskretisierung wird am Beispiel der allgemeinen Transportgleichung

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho v_i \phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = f_i \quad (6.1)$$

näher erläutert. Ziel der Diskretisierung ist es, die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung der Form

$$\mathbf{A}\phi = \mathbf{s} \quad (6.2)$$

zu überführen und zu lösen.

Dafür wird das Rechenggebiet in FASTEST-3D in hexaederförmige Kontrollvolumen (KV) unterteilt. Ein Kontrollvolumen mit dem Index P besitzt somit sechs benachbarte Kontrollvolumen. Diese werden mit East (E), West (W), North (N), South (S), Top (T) und Bottom (B) bezeichnet. Jedes Kontrollvolumen besitzt im Mittelpunkt einen Wert der Strömungsgrößen u, v, w, p , der einen Mittelwert über das gesamte KV darstellt (siehe Abbildung 6.1).

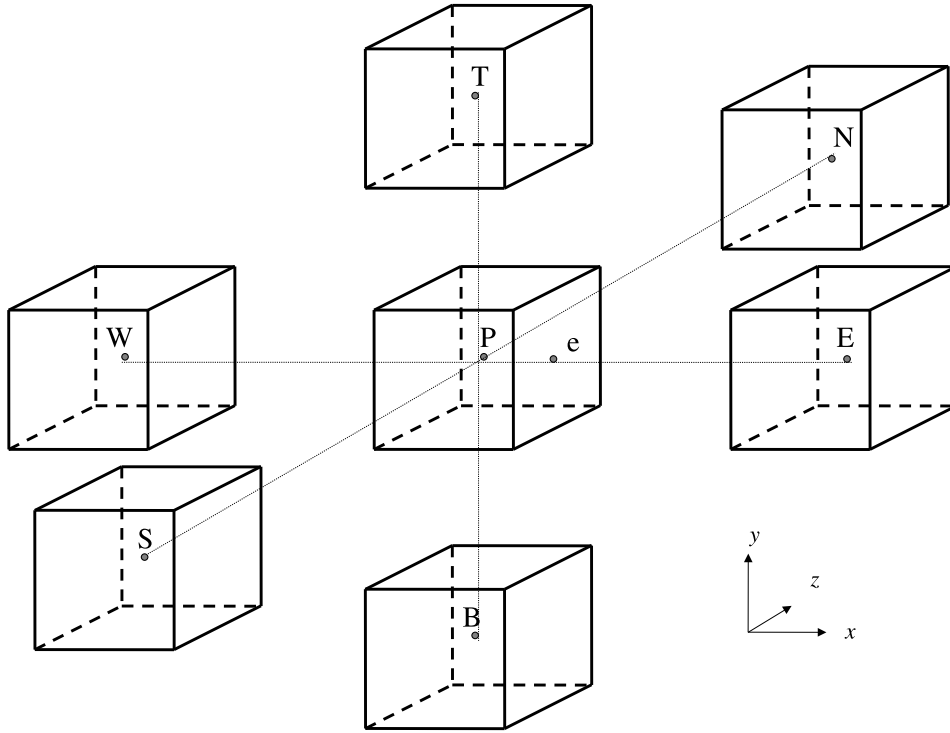


Abbildung 6.1: 3-dimensionale Darstellung eines KV

Im ersten Schritt wird durch Integration der Gleichung 6.1 über ein KV und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die allgemeine Transportgleichung in die folgende Form überführt:

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV}_{\text{Zeitterm}} + \underbrace{\int_S \rho v_i \phi n_i dS}_{\text{konvektiver Fluss}} - \underbrace{\int_S \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} n_i dS}_{\text{diffuser Fluss}} = \underbrace{\int_V f_i dV}_{\text{Quellterm}}. \quad (6.3)$$

Hierbei entstehen ein Volumenintegral, das alle über das Volumen integrierten Quellen zusammenfasst, sowie zwei Flächenintegrale, die den konvektiven und den diffusen Fluss über die Oberflächen der Kontrollvolumen darstellen. Der zeitliche Term wird in Kapitel 6.2 näher beschrieben.

Die Oberflächenintegrale werden durch die Summe der sechs Oberflächenintegrale der sechs Seiten S_c [$c = E, W, S, N, T, B$] des Kontrollvolumens beschrieben.

$$\int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \sum_c \int_{S_c} \left(\rho v_i \phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) n_{ci} dS_c = \int_V f_i dV \quad (6.4)$$

Um die konvektiven Flüsse über eine Kontrollvolumenfläche S_c zu bestimmen, wird die folgende Approximation eingeführt:

$$F_c^C = \int_{S_c} (\rho v_i \phi n_i)_c dS \approx (\rho v_i n_i)_c \delta S_c \phi_c = \dot{m}_c \phi_c, \quad (6.5)$$

wobei \dot{m}_c den Massenfluss über die entsprechende Kontrollvolumenseite bezeichnet.

Hierfür wird die physikalische Größe an den Grenzflächen zweier benachbarter Kontrollvolumen benötigt. Dies kann mit dem Zentralknotenverfahren aus den Werten in den Zellmittelpunkten bestimmt werden und soll am Beispiel der Ostseite (E) näher aufgezeigt werden. Die nachfolgenden Herleitungen beziehen sich nur auf orthogonale Hexaedergitter.

$$\phi_e \approx \phi_E \gamma_e + \phi_P (1 - \gamma_e), \quad (6.6)$$

wobei der Interpolationsfaktor γ_e wie folgt definiert ist

$$\gamma_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}. \quad (6.7)$$

Es existieren weitere Verfahren, um die physikalische Größe ϕ_e zu approximieren. In FASTEST-3D ist noch das Upwind-Verfahren sowie das Flux-Blending Verfahren, welches eine Kombination beider Verfahren darstellt, implementiert (FASTEST 2001). An dieser Stelle wird jedoch nicht näher auf diese Verfahren eingegangen, da für LES Rechnungen ein Verfahren von mindestens 2. Ordnung verwendet werden muss und diese Anforderung nur durch das Zentralknotenverfahren erfüllt wird. Allerdings ist hier anzumerken, dass das Zentralknotenverfahren nur bei einem äquidistanten Gitter einen Fehler 2. Ordnung besitzt, da hier der Fehlerterm 1. Ordnung verschwindet. Der Fehlerterm 1. Ordnung erhöht sich mit dem Größenunterschied zweier benachbarter Kontrollvolumen. Deshalb sollte bei der Gittergenerierung darauf geachtet werden, dass das Expansionsverhältnis zweier benachbarter Zellen in der Nähe von Eins liegt.

Bei der Diskretisierung diffuser Flüsse muss der Gradient der gesuchten Größe an den Kontrollvolumenflächen berechnet werden:

$$F_c^D \approx \alpha n_{ci} \delta S_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right). \quad (6.8)$$

Dies kann direkt mit der Zentralknotenverfahren bestimmt werden und wird hier wieder exemplarisch an der Ostseite dargestellt:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P}. \quad (6.9)$$

Der Quellterm stellt ein Volumenintegral dar, welches ebenfalls mit Hilfe der Mittelpunktsregel approximiert werden kann. Dabei gilt:

$$\int_V f dV \approx f \delta V. \quad (6.10)$$

Der Wert f ist im Mittelpunkt bekannt und δV wird aus den geometrischen Abmessungen des Kontrollvolumens bestimmt. In dem Quellterm befindet sich bei der Impulsgleichung auch die erste Ableitung des Druckes. Hier kann wieder der Gaußsche Integralsatz angewendet werden und das daraus entstehende Flächenintegral wieder über die sechs Kontrollvolumenseiten aufaddiert werden:

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_S p n_i dS = \sum_c \int_{S_c} p n_i dS_c. \quad (6.11)$$

Der hierfür benötigte Wert im Zentrum der Kontrollvolumenoberfläche wird mittels linearer Interpolation bestimmt

$$p_e = \gamma_{e1} p_E + \gamma_{e2} p_P, \quad (6.12)$$

wobei γ_{e1} und γ_{e2} die Interpolationsfaktoren darstellen.

Durch diese Approximationen erhält man nach einigen Umformungen für jedes Kontrollvolumen die allgemeine Transportgleichung in ihrer diskreten Form:

$$\frac{\partial \rho \phi_P}{\partial t} \delta V = -a_P \phi_P + \sum_c a_c \phi_c + s_P. \quad (6.13)$$

Hierbei bezeichnet der Index c die sechs benachbarten Kontrollvolumen, a_P und a_c sind die aus der Diskretisierung hervorgegangenen Koeffizienten der unbekannten Größe ϕ_P , ϕ_c in den dazugehörigen Kontrollvolumen P und c . Alle Terme, die nicht in dem impliziten Teil enthalten sind, werden in dem Quellterm s_P zusammengefasst.

FASTEST-3D kann, wie bereits erwähnt, auch für nicht orthogonale Gitter verwendet werden. Hierbei wird ein lokales Koordinatensystem für jedes Kontrollvolumen eingeführt. Näheres dazu kann dem Handbuch von FASTEST-3D (FASTEST 2001) entnommen werden.

6.2 Zeitliche Diskretisierung

Die Navier-Stokes-Gleichungen wie auch alle weiteren Transportgleichungen reduzieren sich nach der räumlichen Diskretisierung auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Zeit. Da die Zeit nur eine bestimmte Richtung besitzt, muss diese gesondert zu der räumlichen Diskretisierung betrachtet werden. Dazu wird das betrachtete Zeitintervall in Teilintervalle Δt_n ($\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) unterteilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird ein Variablenwert zum Zeitpunkt t_n mit einem hochgestellten Index n bezeichnet.

Bei der Zeitdiskretisierung wird zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterschieden. Das einfachste Verfahren stellt dabei das explizite Euler-Verfahren dar. Hier

wird eine Approximation der Zeitableitung mittels einer Vorwärtsdifferenzenformel durchgeführt:

$$\frac{(\rho\phi_P\delta V)^{n+1} - (\rho\phi_P\delta V)^n}{\Delta t_n} = -a_P^n\phi_P^n + \sum_c a_c^n\phi_c^n + S_P^n \quad (6.14)$$

Approximiert man die Zeitableitung durch eine Rückwärtsdifferenz erster Ordnung, erhält man das implizite Euler-Verfahren:

$$\frac{(\rho\phi_P\delta V)^{n+1} - (\rho\phi_P\delta V)^n}{\Delta t_n} = -a_P^{n+1}\phi_P^{n+1} + \sum_c a_c^{n+1}\phi_c^{n+1} + S_P^{n+1} \quad (6.15)$$

Das explizite Euler-Verfahren hat den Nachteil, dass es mehrere Zeitschritte benötigt, bis sich eine Änderung der Randbedingungen auf das innere Strömungsfeld auswirkt. Je feiner das Gitter ist, desto länger benötigt die Ausbreitung der Information. Aufgrund numerischer Instabilitäten ist die Zeitschrittweite beim expliziten Euler-Verfahren stark begrenzt. Das implizite Euler-Verfahren ist wesentlich rechenintensiver, besitzt jedoch keine stabilitätsbedingte Einschränkung der Zeitschrittweite, so dass bei diesem Verfahren Rechenzeit durch größere Zeitschrittweiten eingespart werden kann.

Das Crank-Nicolson-Verfahren erhält man, indem man eine Zentraldifferenzenapproximation der Zeitableitung zum Zeitpunkt $t_{(n+1)/2}$ vornimmt:

$$\frac{(\rho\phi_P\delta V)^{n+1} - (\rho\phi_P\delta V)^n}{\Delta t_n} = 0,5 \left[-a_P^{n+1}\phi_P^{n+1} + \sum_c a_c^{n+1}\phi_c^{n+1} + S_P^{n+1} \right] + 0,5 \left[-a_P^n\phi_P^n + \sum_c a_c^n\phi_c^n + S_P^n \right] \quad (6.16)$$

Dieses Verfahren ist numerisch nur geringfügig aufwendiger, als das implizite Eulerverfahren, besitzt jedoch die Genauigkeit zweiter Ordnung. Die räumliche und zeitliche Diskretisierung führt nach einigen Umformungen zu der in Gleichung 6.2 gezeigten diskreten Form.

6.3 Druckkorrekturverfahren

Grundsätzlich existieren für dreidimensionale Berechnungen vier Gleichungen (die drei Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung), um den Druck sowie die drei Geschwindigkeitskomponenten zu berechnen. Da jedoch bei inkompressiblen Strömungen der Druck in der Kontinuitätsgleichung nicht auftritt, fehlt eine Gleichung um den Druck direkt zu berechnen. Eine Möglichkeit, um die Kontinuitätsgleichung in die Druckberechnung mit einzubeziehen, stellt das Druckkorrekturverfahren dar.

Im Folgenden wird das in FASTEST-3D implementierte SIMPLE-Verfahren (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), welches 1972 von Patankar und Spalding vorgeschlagen wurde, näher erläutert (FASTEST 2001).

Ausgehend von der diskreten Impulsgleichung werden mit Hilfe eines "bekannten" Druckfeldes p^* aus der vorherigen Iteration bzw. aus der Anfangsbelegung die Geschwindigkeitskomponenten u_i^{**} für den nächsten Iterationsschritt nach folgender Gleichung bestimmt:

$$a_p u_{i,p}^{**} - \sum_c a_c u_{i,c}^{**} + \delta p_i^* = b \quad (6.17)$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten erfüllen nun nicht mehr die Kontinuitätsgleichung. Es entsteht ein Massendefekt, der wie folgt berechnet werden kann:

$$\Delta m = \sum_c F_c \quad (6.18)$$

Um die Flüsse F_c an den Kontrollvolumenseiten zu bestimmen, müssen die Geschwindigkeiten $u_{i,c}$ an diesen Seiten berechnet werden. Dies wird in FASTEST-3D mit der selektiven Interpolation von Rhie und Chow (Rhie & Chow 1983) durchgeführt. Mit dieser Methode ist es möglich, die Geschwindigkeitskomponenten $u_{i,c}$ so zu interpolieren, dass sie nur von den Drücken in den direkt benachbarten Kontrollvolumenzentren abhängig sind. Somit werden Oszillationen im Druckfeld vermieden. Näheres zu dieser Problematik kann Ferziger und Peric (Ferziger & Peric 1996) und Schäfer (Schäfer 1999) entnommen werden.

Um den Massendefekt Δm auszugleichen, müssen die Geschwindigkeitskomponenten und der Druck korrigiert werden. Es werden folgende Korrekturen eingeführt:

$$u_i^{***} = u_i^{**} + u'_i, \quad (6.19)$$

$$p^{**} = p^* + p'. \quad (6.20)$$

Setzt man die korrigierten Werte u_i^{***} und p^{**} in die diskreten Impuls- und Kontinuitätsgleichungen ein und subtrahiert diese von Gleichung 6.17 und 6.18, erhält man die folgenden Beziehungen:

$$a_p u'_{i,p} + \sum_c a_c u'_{i,c} + \delta p'_i = 0 \quad (6.21)$$

$$\Delta m^* = \sum_c F'_c. \quad (6.22)$$

Bei dem SIMPLE-Verfahren wird der Summenterm in Gleichung 6.21 vernachlässigt. Löst man Gleichung 6.21 nach u'_i auf und berechnet mit der selektiven Interpolation die Geschwindigkeiten in den Kontrollvolumenseiten und setzt diese wiederum in Gleichung 6.22 ein, entsteht die Druckkorrekturgleichung

$$a_P p'_P - \sum_c a_c p'_c = \Delta m_P^*, \quad (6.23)$$

die nur noch die Unbekannte p' enthält. Die ausführliche Herleitung der Koeffizienten und Quellterme kann Ferziger und Peric (Ferziger & Peric 1996) entnommen werden. Ist die Druckkorrektur p' bestimmt, können im Anschluss die Geschwindigkeitskorrekturen u'_i mit Gleichung 6.21 ermittelt werden. Mit den Korrekturwerten können schließlich die gesuchten Werte u_i^{***} und p^{**} berechnet werden. Für den Fall, dass nach der Korrektur die Impuls- **und** die Kontinuitätsgleichung näherungsweise erfüllt sind, wird der nächste Zeitschritt berechnet, ansonsten wird ein weiterer Iterationsschritt des Druckkorrekturverfahrens durchgeführt. Das Schema der Druckkorrektur ist in Abbildung 6.2 dargestellt.

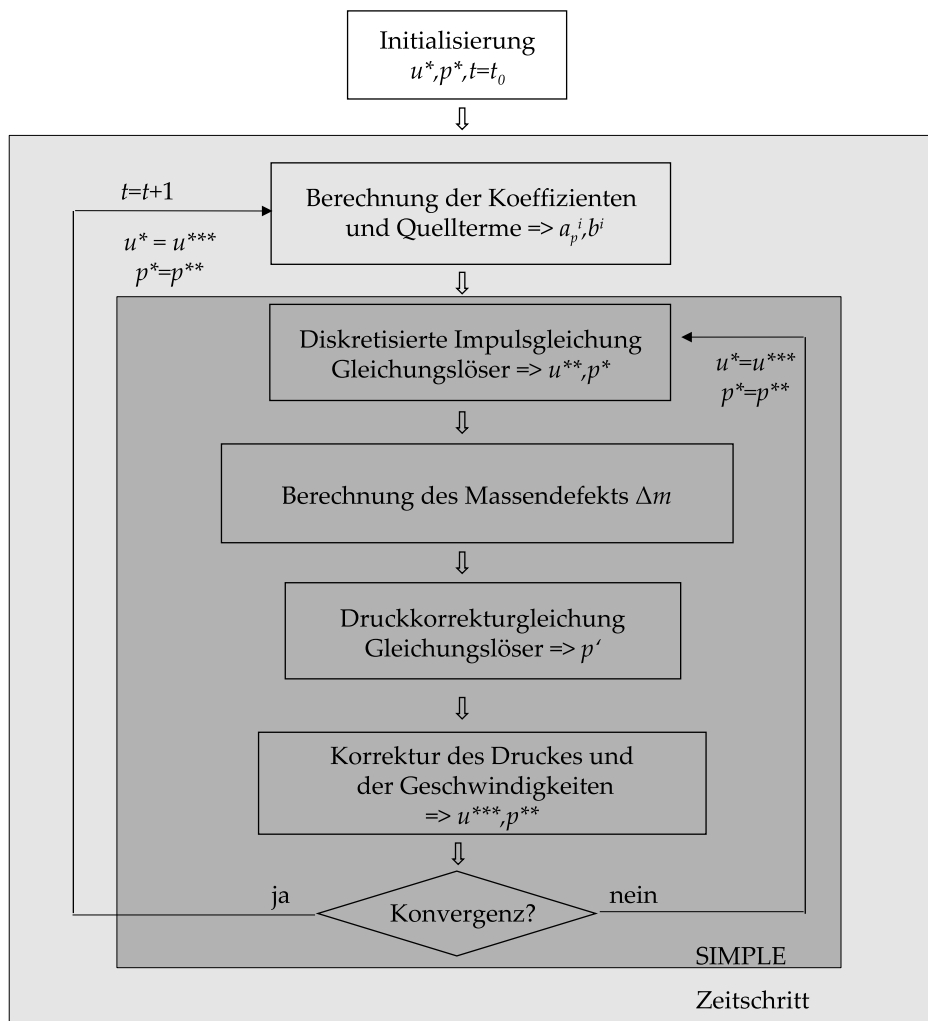


Abbildung 6.2: Prinzip des SIMPLE-Verfahrens

6.4 Lösungsverfahren

In einem Iterationsschritt des SIMPLE-Verfahrens muss das folgende lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$a_P^i \phi_P^i - \sum_c a_c^i \phi_c^i = s_P^i, \quad (6.24)$$

hierbei gilt $i = 1, 2, \dots, n$, wobei n die Anzahl der Kontrollvolumen ist. In Matrixschreibweise kann Gleichung 6.24 durch Gleichung 6.2 dargestellt werden. Dabei stellt die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} eine $n \times n$ -Matrix dar und wird aus den Koeffizienten der Gleichung 6.24 konstruiert. Die zu bestimmende physikalische Größe ϕ sowie der Quellterm \mathbf{s} sind n -dimensionale Vektoren.

Um Gleichung 6.24 zu lösen ist in FASTEST-3D der SIP-Solver (*strongly implicit procedure*) nach Stone (FASTEST 2001) implementiert. Bei diesem Verfahren wird, ausgehend von einer geschätzten Anfangsbelegung solange korrigiert, bis Gleichung 6.24 annähernd gelöst ist:

$$\phi^k \rightarrow \phi^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.25)$$

Um die Korrekturwerte zu bestimmen, wird die unvollständige LU-Zerlegung angewandt. Hierbei wird \mathbf{A} in eine untere und obere Dreiecksmatrix aufgespalten. Das Produkt dieser beiden Dreiecksmatrizen soll möglichst exakt die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} darstellen.

$$\mathbf{A} \approx \mathbf{LU} \quad (6.26)$$

Als Basis für die Bestimmung der Korrekturwerte wird die folgende Gleichung eingeführt:

$$\mathbf{LU}\phi^{k+1} - \mathbf{LU}\phi^k = \mathbf{s} - \mathbf{A}\phi^k, \quad (6.27)$$

wobei die rechte Seite den Residuenvektor \mathbf{r}^k darstellt.

Durch das Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{LU}\Delta\phi^k = \mathbf{r}^k \quad (6.28)$$

können die Korrekturen $\Delta\phi^k$ bestimmt werden, um den gesuchten Wert $\phi^{k+1} = \phi^k + \Delta\phi^k$ für den nächsten Zeitschritt zu bestimmen. Die Iteration wird solange durchgeführt, bis die Summe der Beträge der Elemente des Residuenvektors unter einen vordefinierten Wert sinkt. Näheres zur Erstellung der Dreiecksmatrizen und dem SIP-Solver kann der Literatur entnommen werden [z.B. (Schäfer 1999)].

7 Level Set Methode

7.1 Theoretische Grundlagen

Ein Verfahren, um die Evolution einer geschlossenen Fläche im dreidimensionalen Raum zu beschreiben, stellt die **Level Set Methode** dar (Osher & Fedkiw 2003, Sethian 1999). Der Kern dieser Methode liegt in der impliziten Beschreibung der zu untersuchenden Evolutionsfläche. Man definiert die Level Set Funktion $G(\mathbf{x}(t), t)$ als eine skalare Feldvariable, die auf einer Seite der Fläche positive ($G > 0$) und auf der anderen Seite negative Werte ($G < 0$) annimmt. Die zu verfolgende Fläche wird über die Nullstellenmenge der Level Set Funktion ($G = 0$) beschrieben. Die Werte der Level Set Funktion auf der Grenzfläche bleiben konstant $G(\mathbf{x}(t), t) = 0$ und somit gilt dort $dG(\mathbf{x}(t), t)/dt = 0$. Die letzte Bedingung führt zur Level-Set-Gleichung:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \nabla G(\mathbf{x}(t), t) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = 0, \quad (7.1)$$

wobei $\mathbf{x}(t)$ ¹ die Ortskoordinate in Abhängigkeit der Zeit t darstellt. Da $\nabla G(\mathbf{x}(t), t)$ senkrecht auf der Oberfläche steht, ist lediglich der Normalenanteil für die Oberflächenpropagation relevant. Somit gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit F_{Ext} der Grenzfläche:

$$F_{Ext} = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}. \quad (7.2)$$

Der normierte Normalenvektor ist durch $\mathbf{n} = -\nabla G/|\nabla G|$ gegeben. Aus der letzten Gleichung und der Gleichung (7.1) lässt sich eine generische Level Set Gleichung herleiten (Osher & Sethian 1988):

$$G_t - F_{Ext}|\nabla G| = 0, \quad (7.3)$$

wobei F_{Ext} vom Anwendungsfall abhängt. Damit hat die Level Set Gleichung nur einen einzigen Parameter, der modelliert werden muss: die lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit F_{Ext} . Aus der Herleitung der Level Set Gleichung ist offensichtlich, dass F_{Ext} nur auf der evolutionierenden Fläche definiert ist. Außerhalb der Fläche ($G \neq 0$) ist die Level Set Funktion physikalisch bedeutungslos. Aus numerischen

¹ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, wobei $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$ entspricht.

Gründen benutzt man außerhalb der Fläche meist eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion, d.h. man hat die Eikonale Gleichung zu lösen:

$$|\nabla G| = 1. \quad (7.4)$$

Das Lösen der Eikonalen Gleichung 7.4 wird als Reinitialisierung bezeichnet und wird lediglich aus Gründen der numerischen Stabilität eingesetzt (Sethian 1999).

Die implizite Flächenbeschreibung mittels der Level Set Methode besitzt im Vergleich zu anderen Methoden viele Vorteile. So liegt zum Beispiel die Grenzfläche immer als scharfe Grenze vor und wird nicht wie bei der Volume of Fluid Methode über mehrere Gitterzellen "verschmiert". Ein numerisches Problem der Level Set Methode stellt jedoch die Erhaltung der Masse dar. Durch den Transport der Nullkontur gemäß der Fortbewegungsgeschwindigkeit wird im Allgemeinen die Abstandseigenschaft zerstört. Der Reinitialisierungsprozess stellt die Abstandseigenschaft wieder her. Sie verursacht jedoch eine künstliche Verschiebung der Nullkontur. Dadurch wird Masse unphysikalisch von der einen Fluidphase in die andere Fluidphase transportiert (Bürger 2008).

Die Numerik der Level Set Methode ist für Standardfälle mit kartesischen Gittern ein etabliertes Verfahren. Ein Überblick über die zahlreichen numerischen Methoden geben Sethian (Sethian 1999) und Osher (Osher & Fedkiw 2003).

7.2 Numerische Implementierung

7.2.1 Extension-Velocity-Methode

Die Extension-Velocity-Methode ist eine effektive Methode nach Adalsteinsson und Sethian (Sethian 1999), bei der die Level Set Gleichung und die Eikonale Gleichung kombiniert werden. Mit dieser Methode ist es möglich, dass ein berechnetes G -Feld jederzeit die vorzeichenbehaftete Distanz zur $G = 0$ - Fläche angibt. Hierzu werden zuerst die Ausbreitungsgeschwindigkeiten (Extension Velocities, F_{Ext}) direkt an der Sedimentfläche bestimmt und danach mit Hilfe der Fast-Marching Methode die Extension Velocities auf den übrigen Gitterpunkten berechnet. Sind die Extension Velocities im gesamten Gebiet bekannt, kann anschließend mittels einer Zeitintegration das neue G -Feld bestimmt werden. Der Algorithmus soll nun im Folgenden näher erläutert werden.

- **Änderung des G -Feldes auf der Sedimentoberfläche**

Um die zeitliche Entwicklung der Sedimentoberfläche zu bestimmen, muss die Level Set Gleichung gemäß ihres Definitionsbereichs entlang der Grenzfläche berechnet werden. Dafür müssen zunächst eine diskrete Menge an Gitterpunkten identifiziert werden, die näherungsweise der $G = 0$ - Fläche entsprechen. Dies wird mit Hilfe der Signum Funktion

$$\text{sign}(G) = \begin{cases} 1 & \text{für } G > 0 \\ 0 & \text{für } G = 0 \\ -1 & \text{für } G < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

durchgeführt. Dadurch entstehen Paare von benachbarten Gitterpunkten mit unterschiedlichen Vorzeichen, die eine Teilmenge von "Known Values" darstellen. Die Hälfte dieser Punkte gehört zu dem Sedimentbereich (\mathbb{K}_{GS}) und die andere Hälfte befindet sich im Strömungsgebiet (Fluidgebiet) (\mathbb{K}_{GF}).

$$\mathbb{K}_G = \left\{ P^{(i;j;k)} \in G \left| \begin{array}{l} \text{sign}(G^{(i;j;k)}) \neq \text{sign}(G^{(i\pm 1;j;k)}) \text{ oder} \\ \text{sign}(G^{(i;j;k)}) \neq \text{sign}(G^{(i;j\pm 1;k)}) \text{ oder} \\ \text{sign}(G^{(i;j;k)}) \neq \text{sign}(G^{(i;j;k\pm 1)}) \end{array} \right. \right\} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{GF} &= \{ P^{(i;j;k)} \in \mathbb{K}_G \mid \text{sign}(G^{(i;j;k)}) = 1 \}; \\ \mathbb{K}_{GS} &= \{ P^{(i;j;k)} \in \mathbb{K}_G \mid \text{sign}(G^{(i;j;k)}) \neq 1 \} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Fällt man jeweils ein Lot von diesen K Punkten auf die $G = 0$ - Fläche, kann jedem K -Punkt ein Punkt P_S direkt auf der Sedimentoberfläche zugeordnet werden (siehe Abbildung 7.1). An diesem Punkt wird dann F_{Ext} bestimmt. Betrachtet man den zur Sedimentoberfläche nächsten Punkt K , stellt man fest, dass der Punkt auf der Sedimentoberfläche P_S genau in dessen Richtung wandert, da sich die Sedimentoberfläche in Normalenrichtung bewegt. Da die Eigenschaft der vorzeichenbehafteten Distanz erfüllt werden muss, muss sich der Punkt K mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Somit kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit $F_{Ext}(P_S)$ auch für die sohlen-nahen Punkte verwendet werden und es gilt $F_{Ext}(P_S) = F_{Ext}(K)$.

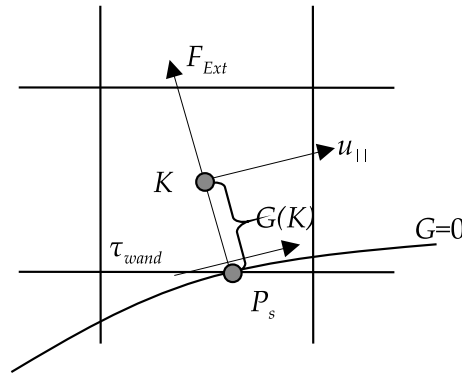


Abbildung 7.1: Skizze zur Berechnung von F_{Ext}

Die Bewegung der Oberfläche, wird wie bereits erwähnt, bei der Level Set Methode mit Hilfe einer flächennormalen Geschwindigkeit F_{Ext} berechnet. Diese Geschwindigkeit hängt von den jeweiligen physikalischen Effekten ab. Im vorliegenden Fall wird die Geschwindigkeit F_{Ext} maßgeblich von der Physik des Sedimenttransportes bestimmt. Im Speziellen ist dies ein Mechanismus zum Abtrag und zur Ablagerung

von Sediment, der vor allem von der Wandschubspannung definiert ist. Da die Level Set Gleichung direkt den Abstand zur Sedimentoberfläche angibt, kann τ_w mit

$$\tau_w(K) = \frac{u_{\parallel}}{G(K)} \quad (7.8)$$

berechnet werden, wobei u_{\parallel} die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Sedimentoberfläche darstellt.

Für die Riffelwanderung kann mit Hilfe dieser Größe die Erosionsrate ermittelt werden. Diese kann mit den in Kapitel 2 dargestellten Ansätzen von van Rijn, Einstein und Yalin berechnet werden. Es gilt:

$$E = \text{Partikelaufnahme rate für } \tau_w > \tau_c, \quad (7.9)$$

$$E = 0 \text{ für } \tau_w < \tau_c, \quad (7.10)$$

wobei τ_w die Wandschubspannung und τ_c die kritische Wandschubspannung für die Erosion beschreibt. Die Sedimentationsrate S wird folgendermaßen bestimmt:

$$S = w_s (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}) c_0, \quad (7.11)$$

wobei c_0 die Konzentration im wandnächsten Gitterpunkt und \mathbf{e}_2 den Richtungseinkheitsvektor der Sinkgeschwindigkeit darstellen. Die Größen S und E/ρ_s beschreiben somit die Erosions- und Sedimentationsgeschwindigkeit in Normalenrichtung zur Sedimentoberfläche. Für die daraus resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit F_{Ext} am Punkt K gilt:

$$F_{Ext}(K) = S(K) - E(K)/\rho_s. \quad (7.12)$$

• Änderung des G -Feldes abseits der Sedimentoberfläche

Um F_{Ext} in den Zellen abseits der Sedimentoberfläche zu bestimmen, muss zunächst mit Hilfe der Fast Marching Methode ein G_{temp} -Feld erstellt werden, bei dem die Eikonale Gleichung erfüllt ist. Das G_{temp} -Feld hat die gleiche Lage des 0-Levels wie das aktuelle G -Feld beim Zeitschritt n . Gleichzeitig wird die Gleichung

$$\nabla G_{temp} \cdot \nabla F_{Ext} = 0 \quad (7.13)$$

gelöst. Um Gleichung 7.13 zu lösen, wird eine nicht oszillierende Diskretisierung (ENO-Diskretisierung vorgeschlagen in (Osher & Fedkiw 2003)) gewählt. Dabei wird ein Upwind-Verfahren mit wechselnden Stützstellen benutzt. Bei diesem Verfahren werden nur Werte, die bereits berechnet und als "accepted" deklariert wurden, ver-

wendet. Dementsprechend werden die Gradienten $\partial G/\partial x_i$ und $\partial F_{Ext}/\partial x_i$ wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x_1} (3\psi^{i,j,k} - 4\psi^{i-1,j,k} + \psi^{i-2,j,k}) & \text{für } \begin{cases} G^{i-1,j,k} \leq G^{i+1,j,k} \wedge \\ P^{i-1,j,k} \in \mathbb{K}_G \wedge \\ P^{i-2,j,k} \in \mathbb{K}_G \end{cases} \\ \frac{1}{\Delta x_1} (\psi^{i,j,k} - \psi^{i-1,j,k}) & \text{für } \begin{cases} G^{i-1,j,k} \leq G^{i+1,j,k} \wedge \\ P^{i-1,j,k} \in \mathbb{K}_G \wedge \\ P^{i-2,j,k} \notin \mathbb{K}_G \end{cases} \\ \frac{1}{2\Delta x_1} (3\psi^{i,j,k} - 4\psi^{i+1,j,k} + \psi^{i+2,j,k}) & \text{für } \begin{cases} G^{i-1,j,k} \geq G^{i+1,j,k} \wedge \\ P^{i+1,j,k} \in \mathbb{K}_G \wedge \\ P^{i+2,j,k} \in \mathbb{K}_G \end{cases} \\ \frac{1}{\Delta x_1} (\psi^{i,j,k} - \psi^{i+1,j,k}) & \text{für } \begin{cases} G^{i-1,j,k} \geq G^{i+1,j,k} \wedge \\ P^{i+1,j,k} \in \mathbb{K}_G \wedge \\ P^{i+2,j,k} \notin \mathbb{K}_G \end{cases} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.14)$$

Analog dazu werden die Diskretisierungen in die x_2 - und x_3 - Richtung durchgeführt.

Nachdem im gesamten Feld F_{Ext} berechnet wurde, kann das G -Feld für den nächsten Zeitschritt mit folgender Gleichung berechnet werden:

$$G_{n+1} = G_n + F_{Ext} \cdot \Delta t. \quad (7.15)$$

7.2.2 Fast Marching Methode

Da, wie bereits erwähnt, die Level Set Methode nur eine Lösung direkt an der Sedimentoberfläche darstellt, müssen die Werte in den Kontrollvolumina außerhalb der Grenzfläche über das Lösen der Eikonalen Gleichung (siehe Gleichung 7.4) erfolgen. Dies kann mit Hilfe der Fast Marching Methode sehr effizient gelöst werden. Die Fast Marching Methode stellt ein Algorithmus dar, der die Eikonale Gleichung ohne Iterationen löst. Die zentrale Idee besteht darin, die Lösung von G nur mit der Zuhilfenahme von "upwind"-Werten systematisch zu konstruieren. Dies bedeutet, dass die Informationen nur in eine Richtung verlaufen und zwar von den betragsmäßig niedrigen G -Werten zu den höheren G -Werten. Die Berechnung der G -Werte beginnt somit an der Grenzfläche und entwickelt sich von dieser "downwind". Die Bestimmung der G -Werte erfolgt dementsprechend getrennt für den positiven und negativen Bereich.

Als Diskretisierung von $|\nabla G|$ ergibt sich:

$$\left[\begin{aligned} & \max(D_{ijk}^{-x}G - D_{ijk}^{+x}G, 0)^2 \\ & + \max(D_{ijk}^{-y}G - D_{ijk}^{+y}G, 0)^2 \\ & + \max(D_{ijk}^{-z}G - D_{ijk}^{+z}G, 0)^2 \end{aligned} \right]^{1/2} = 1 \quad (7.16)$$

mit

$$\begin{aligned} D_{ijk}^{+x} G &\equiv \frac{G(x+\Delta x, t) - G(x, t)}{\Delta x} \\ D_{ijk}^{-x} G &\equiv \frac{G(x, t) - G(x-\Delta x, t)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Bei der Fast Marching Methode wird als erstes das positive bzw. negative Gebiet in drei verschiedene Teilgebiete eingeteilt (siehe Abbildung 7.2). Punkte, die direkt an der Sedimentoberfläche liegen, werden als KNOWN gekennzeichnet. Punkte die in x -, y - und z -Richtung direkt an diese Punkte grenzen, werden als TRIAL-Punkte deklariert. Die Summe der TRIAL-Punkte bilden das sogenannte NARROW-Band. Alle anderen Punkte werden als FAR bezeichnet.

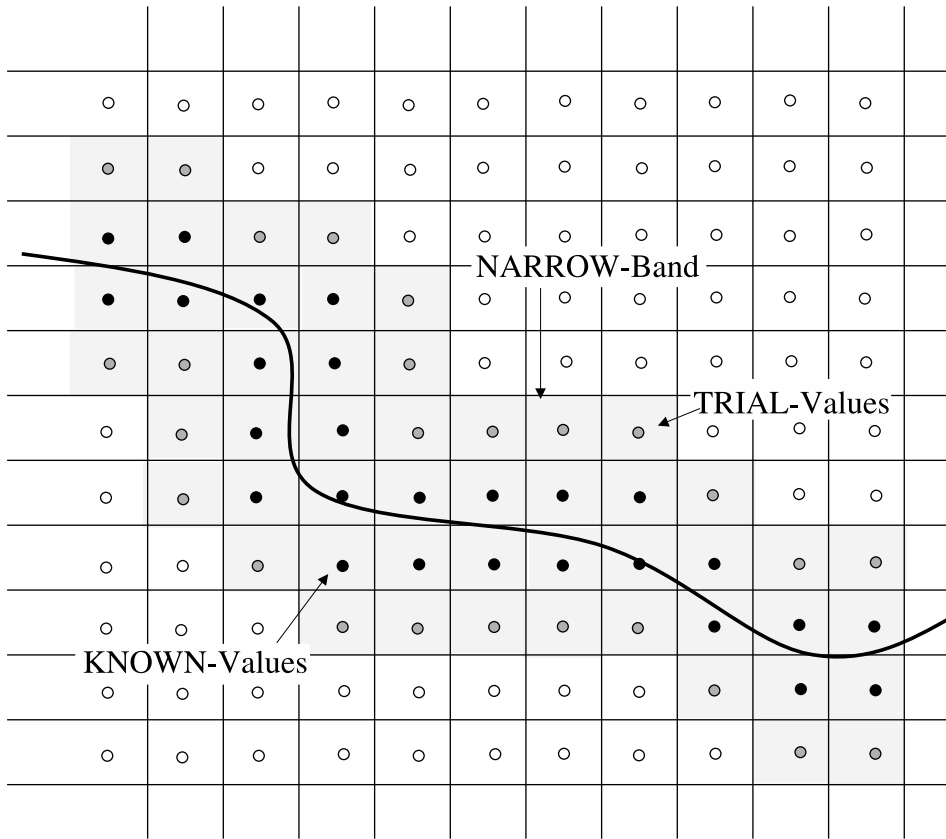


Abbildung 7.2: Schemata der Deklaration der Kontrollvolumen in KNOWN, TRIAL und FAR Punkte

Nun wird für jeden der TRIAL-Punkte die Gleichung 7.17 gelöst. Zum Lösen dieser Gleichung werden nur Werte, die bereits mit KNOWN gekennzeichnet sind, verwendet. Der TRIAL-Punkt, der den kleinsten Wert enthält wird als KNOWN gekennzeichnet. Alle an den neuen KNOWN-Punkt angrenzenden FAR-Punkte werden in TRIAL-Punkte umbenannt. Nun wird wieder von vorne begonnen und die Gleichung 7.17 wird erneut für alle TRIAL-Punkte gelöst. Dieser Algorithmus wird solange durchgeführt, bis alle Kontrollvoluminawerte mit KNOWN gekennzeichnet sind.

Heapsort Verfahren

Die Effektivität der Fast Marching Methode ist stark abhängig vom Auffinden des kleinsten Wertes im Narrow Band. Hierfür eignet sich das sehr effiziente Heapsort Verfahren. Bei dem Heapsort Verfahren handelt es sich um ein selektives Sortieren. Das Sortierverfahren hat eine Zeitkomplexität von $(n \cdot \log(n))$ (Williams 1964). Eine untere Schranke für die Zeitkomplexität von Sortierverfahren ist $(n \cdot \log(n))$. Heapsort ist daher optimal, d.h. es gibt kein asymptotisch schnelleres Sortierverfahren. Bei diesem Verfahren werden zunächst alle n Werte ($G[1] - G[n]$) unsortiert als Knoten eines binären Baumes abgelegt. Der Knoten an der Spitze des Baumes wird Wurzel genannt. Dieser liegt in der ersten Ebene. Einen Knoten (k -te Ebene) und seine zwei anhängenden Knoten eine Ebene höher ($(k + 1)$ -te Ebene) nennt man subheap. Dabei heißt der Knoten in der k -ten Ebene Eltern ($G[i]$) und seine zwei Knoten in der $(k + 1)$ -ten Ebene Kinder ($G[2i]$ und $G[2i + 1]$). Insgesamt gibt es s Ebenen ($s = (\log_2 n) + 1$). Möchte man den "Haufen" (engl. *Heap*) unsortierter Werte nach dem kleinsten Wert sortieren, gilt als Heapbedingung für den gesamten Baum

$$G[i] \leq G[2i] \quad \text{und} \quad G[i] \leq G[2i + 1] \quad (7.18)$$

mit der Bedingung, dass $2i$ bzw. $2i + 1$ gilt.

Es gibt verschiedene Sortierungsmöglichkeiten zur Erfüllung der Heapbedingung. Das Verfahren stellt sicher, dass am Ende der Prozedur der niedrigste Wert in der Wurzel abgelegt ist.

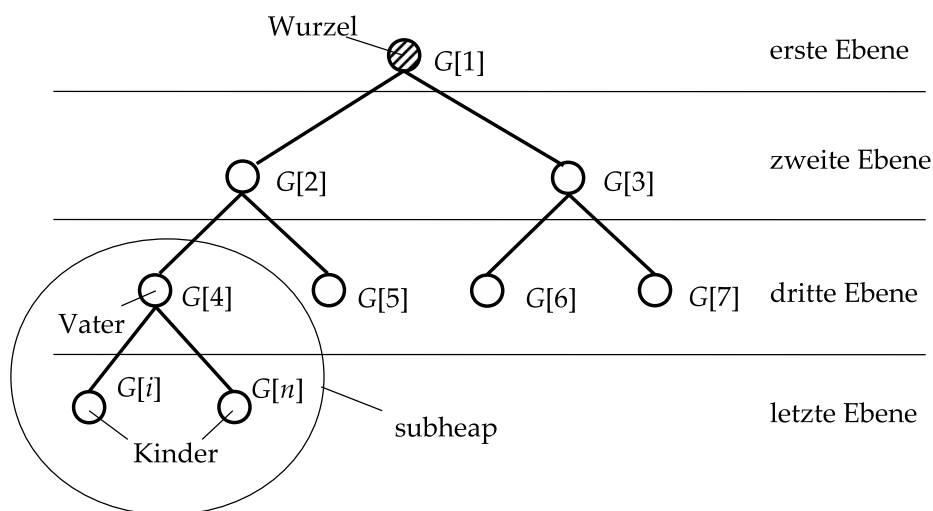


Abbildung 7.3: Prinzip des Heapsort Verfahrens

8 Testfälle und ihre Ergebnisse

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Beschreibung der Riffelbewegung mit Hilfe der Level Set Methode. Die Riffelbewegung wird, wie bereits in Kapitel 3 näher erläutert, durch den Abtrag und die Anlagerung von Partikeln verursacht, die wiederum durch die lokale Wandschubspannung und die Konzentrationsverteilung des Sediments in Suspension gesteuert wird. Die Grenzfläche zwischen Wasser und Sediment sowie der Einfluss der Grenzfläche auf die Strömung werden mittels geeigneter Verfahren abgebildet (siehe Kapitel 7). Die Kopplung dieser Prozesse ist für die Berechnung der Riffelbewegung von maßgeblicher Bedeutung.

Die Grenzfläche zwischen Wasser und Sediment wird mit Hilfe der Level Set Gleichung (Skalar G) beschrieben. Die Isofläche $G = 0$ charakterisiert die Grenzfläche Wasser-Sediment. Der obere Bereich stellt die Wasserphase dar und der Bereich unterhalb der Phasengrenze ist physikalisch durch das Sediment gekennzeichnet. Dies wird über den G -Wert bestimmt. Alle Kontrollvolumen mit einem positiven G -Wert gehören zum Fluid und alle Kontrollvolumen mit einem negativem G -Wert gehören zur Sedimentphase.

Die Modellierung der Sedimentphase unterhalb der Grenzfläche besitzt in diesem Fall keine physikalische Bedeutung, sondern nur numerische Aspekte. Bei der Berechnung in FASTEST-3D muss dieser "Phantombereich" ebenfalls als Fluid modelliert werden. Da die Grenzfläche mit Hilfe der Level Set Methode beschrieben wird, müssen zusätzliche Randbedingungen an der Grenzfläche implementiert werden, um den Einfluss der Sedimentphase auf den Strömungsbereich abzubilden. Bei den durchgeführten Testrechnungen werden die Randbedingungen für feste Wände implementiert. Dies bedeutet, dass kein Fluss durch die Begrenzungsfläche stattfindet und die Geschwindigkeit an der Grenzfläche gleich Null ist (Hafttrandbedingung). Die Darstellung der Sedimentoberfläche mit Hilfe der Level Set Methode hat den Vorteil, dass trotz der komplexen Geometrie der Grenzoberfläche mit sehr schnellen effektiven Codes gearbeitet werden kann, die nur mit kartesischen Gittern rechnen können. Das Strömungsgebiet wird folglich mit einem kartesischen Gitter gerechnet und die Sedimentoberfläche wird explizit mit der Level Set Methode beschrieben.

Bei der Konzentrationsgleichung findet ein Fluss über die Grenzfläche statt. Hierbei muss unterschieden werden, ob die Wandschubspannung an diesem Ort ober- oder unterhalb der kritischen Wandschubspannung liegt. Bei Unterschreitung der kritischen Wandschubspannung wird nur sedimentiert, bei Überschreitung findet Erosion und Sedimentation statt. Die Berechnung der Wandschubspannung erfolgt nach Gleichung 8.1

$$\tau_w = \frac{\nu \cdot u_{||}}{\Delta y}. \quad (8.1)$$

Für die Testfälle werden die Strömungsfelder und die Konzentrationsfelder berechnet. Daraus können die Erosionen und Sedimentationen ermittelt werden. Mit Hilfe der Erosionsrate und Sedimentationsrate wird schließlich die neue Riffelgeometrie berechnet. Im nächsten Zeitschritt muss aufgrund der veränderten Geometrie und der Erosions- und Sedimentationsrate ein neues Strömungs- und Konzentrationsfeld bestimmt werden. Das Schema der Kopplung der verschiedenen Prozesse kann Abbildung 8.1 entnommen werden.

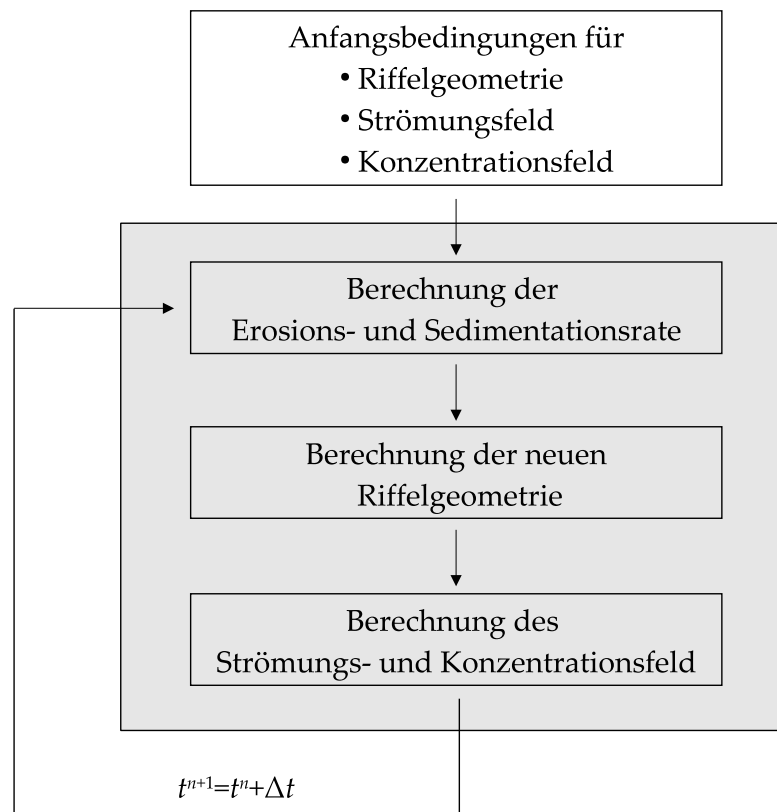


Abbildung 8.1: Schema der implementierten Methodik

Die besondere Schwierigkeit liegt darin, dass die Phasengrenze inhärent instabil ist, sich aber nach Ausbildung der Riffelstruktur ein metastabiler Zustand einstellt. Die Riffel führen eine Translationsbewegung in Strömungsrichtung aus. Diese Wellenbewegung liegt nach Brooks (Kühlborn 1993) bei sehr feinem Sand etwa um den Faktor 5000 unterhalb der Strömungsgeschwindigkeit.

Im ersten Arbeitsschritt wird die LES mit einer "eingefrorenen" Grenzfläche durchgeführt. Die bei der Berechnung gewonnenen Ergebnisse werden mit einer Referenzrechnung verglichen. Danach wird das Strömungsfeld über einer Riffelstruktur beschrieben. Nach Implementierung der Konzentrationsgleichung erfolgt die Berechnung und Analyse des Transports in Suspension. Mit Hilfe der Konzentrationsgleichung kann die Sedimentationsrate berechnet werden. Nach Kopplung der einzelnen

Komponenten wird die zeitliche Veränderung der Riffelgeometrie untersucht. Abschließend erfolgt die Analyse der Entstehung einer Riffelgeometrie.

Als Testfallgeometrie wird ein Gebiet zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten betrachtet, welches mit Hilfe eines orthogonalen Gitters diskretisiert wird (siehe Abb. 8.2).

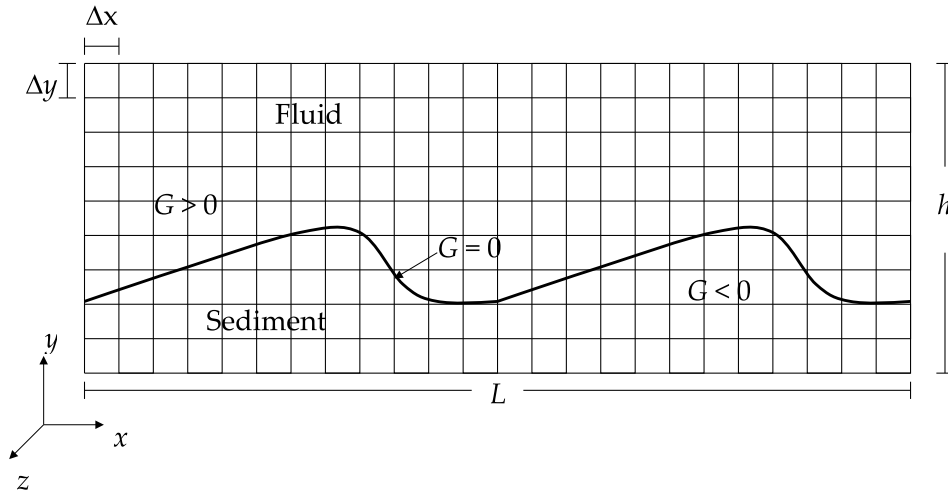


Abbildung 8.2: Skizzierung der Geometrie der Testfälle

Die Sedimentoberfläche wird mit Hilfe der Level Set Methode beschrieben, dies bedeutet, dass sie implizit über eine skalare Feldvariable G , der Level Set Funktion, definiert wird.

Als Randbedingung wird an beiden Platten die Haftbedingung verwendet. In x - und z -Richtung werden periodische Randbedingungen verwendet, um die unendliche Ausdehnung zu modellieren. Um die Strömung anzutreiben, wird ein Druckgradient in Hauptströmungsrichtung verwendet, der jeden Zeitschritt über den Massenfluss mit einem einfachen diskreten Regler nach folgender Gleichung

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\Delta t} (u_b^0 + u_b^n - 2u_b^{n+1}) \quad (8.2)$$

korrigiert wird (Breuer 2001). Hierbei beschreibt u_b die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und u_b^0 den gewünschten Zielwert, der sich einstellen soll.

Die Zeitschrittweite muss ausreichend klein sein, damit die CFL -Zahl < 1 ist. Die CFL -Zahl definiert das Verhältnis zwischen dem Weg, den ein Fluidteilchen zurücklegt und der Länge der durchströmten Zelle. Damit die Turbulenz vollständig aufgelöst wird, darf das Fluidteilchen nicht durch eine oder mehrere Zellen strömen. Eine größere Zeitschrittweite entspräche einer zeitlichen Filterung.

8.1 Vergleich Referenzrechnung - Level Set Methode

Um die Ergebnisse der Modellierung mit der Level Set Methode bewerten zu können, wird eine Referenzrechnung durchgeführt. Dafür wird eine im Wandbereich hochaufgelöste LES mit einem gekrümmten, randangepassten Gitter verwendet. Bei der Referenzrechnung handelt es sich um eine Strömung zwischen zwei Platten, wobei die untere Platte eine Sinuswellenform besitzt. Diese Ergebnisse werden anschließend mit den Ergebnissen der Level Set Rechnungen verglichen.

8.1.1 Beschreibung der Referenzrechnung

Als feste Sohlform wird eine zweidimensionale Sinuswelle gewählt. Die Strömungsbedingungen und die Form der Sinuswelle orientieren sich an den Versuchen von Zedler und Street (Zedler & Street 2001). Die Sinuswelle wird über die Funktion

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (8.3)$$

definiert, wobei $A = 1,5 \text{ cm}$ die und $\lambda = 15 \text{ cm}$ die Wellenlänge darstellen. Die Strömung besitzt eine Reynoldszahl von $Re = 6000$, die sich auf die halbe Kanalhöhe bezieht. Das Rechengebiet hat die Ausmaße von 30 cm in x -Richtung und von 15 cm in z -Richtung. Die beiden Platten besitzen einen mittleren Abstand von 6 cm (siehe Abbildung 8.3).

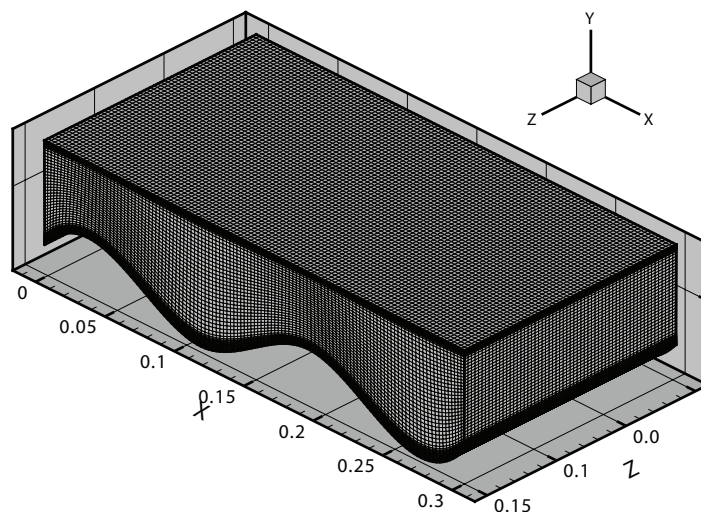


Abbildung 8.3: Geometrie der Referenzrechnung

An beiden Platten gilt die Haftbedingung und in den zwei anderen Raumrichtungen werden periodische Randbedingungen angewandt. Die Strömung wird durch einen Druckgradienten angetrieben, der analog zur Level Set Rechnung korrigiert wird. Hintergrund ist, dass die Reibungsverluste aus der Phasengrenze im Rahmen der Periodizitätsannahme ausgeglichen werden müssen.

Dieser Strömungsfall ist in z -Richtung homogen. Somit sind alle statistischen Größen der Turbulenz in z -Richtung gleich.

Um den Einfluss der Gitterauflösung zu untersuchen, werden die Rechnungen mit drei verschiedenen Auflösungen durchgeführt. Die Gitter besitzen in x -, y -, z -Richtung

- Rechnung 1: $120 * 60 * 60$ in y -Richtung äquidistant
- Rechnung 2: $120 * 60 * 60$ in y -Richtung logarithmisch verfeinert
- Rechnung 3: $120 * 120 * 60$ in y -Richtung logarithmisch verfeinert

Kontrollvolumina.

In Hauptströmungsrichtung sowie in z -Richtung sind die Zellen äquidistant. Für die Rechnungen 2 und 3 werden die Zellen in Wandrichtung logarithmisch verfeinert. Bei Rechnung 1 sind die Zellen in y -Richtung ebenfalls äquidistant. Es wird bei allen drei Testfällen das Germano-Modell verwendet, wobei die Germanokonstante in z -Richtung gemittelt wird. Als Testfilter wird der Top-hat Filter mit dem Verhältnis Testfilter zu Gitterfilterweite $\tilde{\Delta}/\Delta = 2$ gewählt. Die Filterweite wird mit Gleichung 5.14 berechnet.

8.1.2 Ergebnisse der Referenzrechnung

Die LES-Rechnungen werden, wie bereits erwähnt, mit drei verschiedenen Auflösungen durchgeführt. Anhand Abbildung 8.4 ¹ ist zu erkennen, dass bei Rechnung 1 in Teilgebieten mit hohen Strömungsgeschwindigkeiten, z.B. kurz vor der Krone ein dimensionsloser Wandabstand von bis zu $y^+ \approx 10$ bei der ersten Gitterzelle auftreten kann. Bei Rechnung 2 liegt dieser Wert bei $y^+ \approx 3$ und für Rechnung 3 liegt dieser Wert bei $y^+ \approx 1$.

¹Bei der Abbildung physikalischer Größen entlang der x -Achse wird die Geometrie der Sohle zur besseren Orientierung mit abgebildet

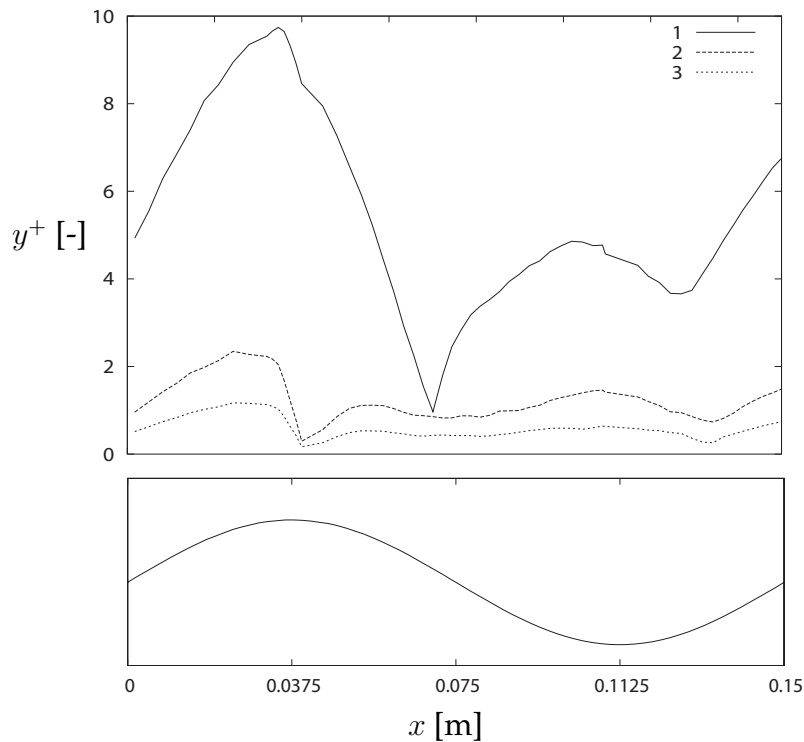


Abbildung 8.4: Dimensionsloser Wandabstand der wandnächsten Gitterzelle

Vergleicht man nun die Geschwindigkeitsprofile an vier verschiedenen x -Koordinaten (siehe Abbildungen 8.5 bis 8.8 links oben), werden die Unterschiede aufgrund der verschiedenen Gitterauflösungen sichtbar. Die mittleren Geschwindigkeitsprofile der Rechnungen 2 und 3 zeigen nur geringe Differenzen. Die Unterschiede der Profile aus Rechnung 1 zu den Profilen aus Rechnung 2 und 3 sind auf die gröbere Auflösung im Wandbereich zurückzuführen.

Die turbulenten Statistiken zweiter Ordnung zeigen größere Differenzen zwischen den Rechnungen als die mittleren Geschwindigkeitsprofile auf. In den Abbildungen 8.5 bis 8.8 sind die in Hauptströmungsrichtung gemittelten Reynoldsspannungen $\overline{u'u'}$ oben rechts in wandnormaler Richtung $\overline{v'v'}$ links unten, sowie die Reynoldsspannungen $\overline{u'v'}$ rechts unten abgebildet.

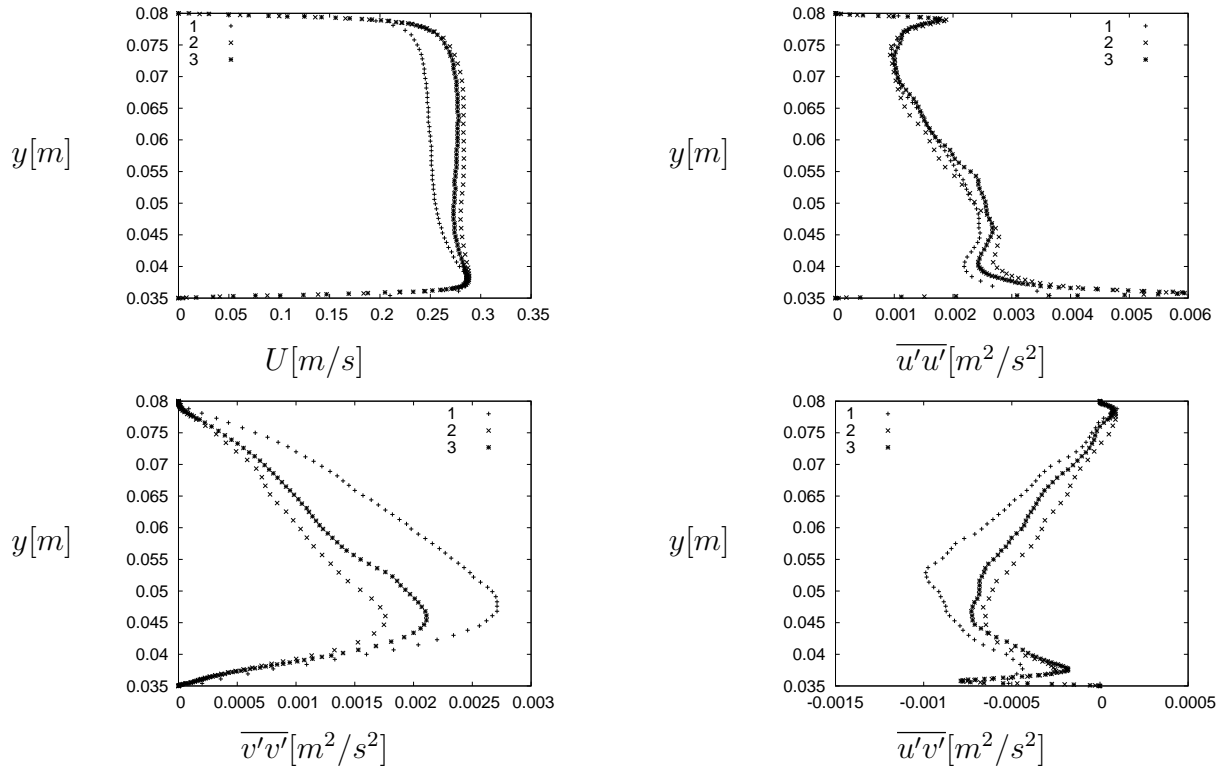


Abbildung 8.5: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,0375 \text{ m}$

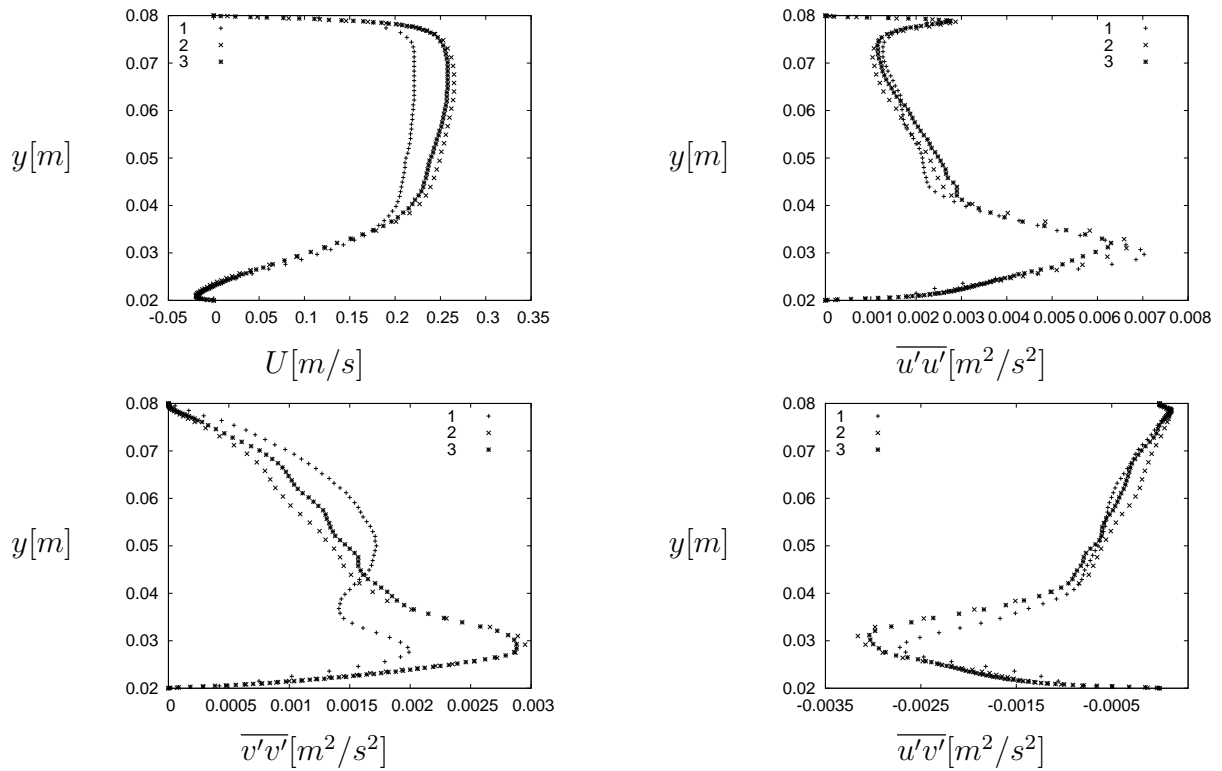


Abbildung 8.6: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,075 \text{ m}$

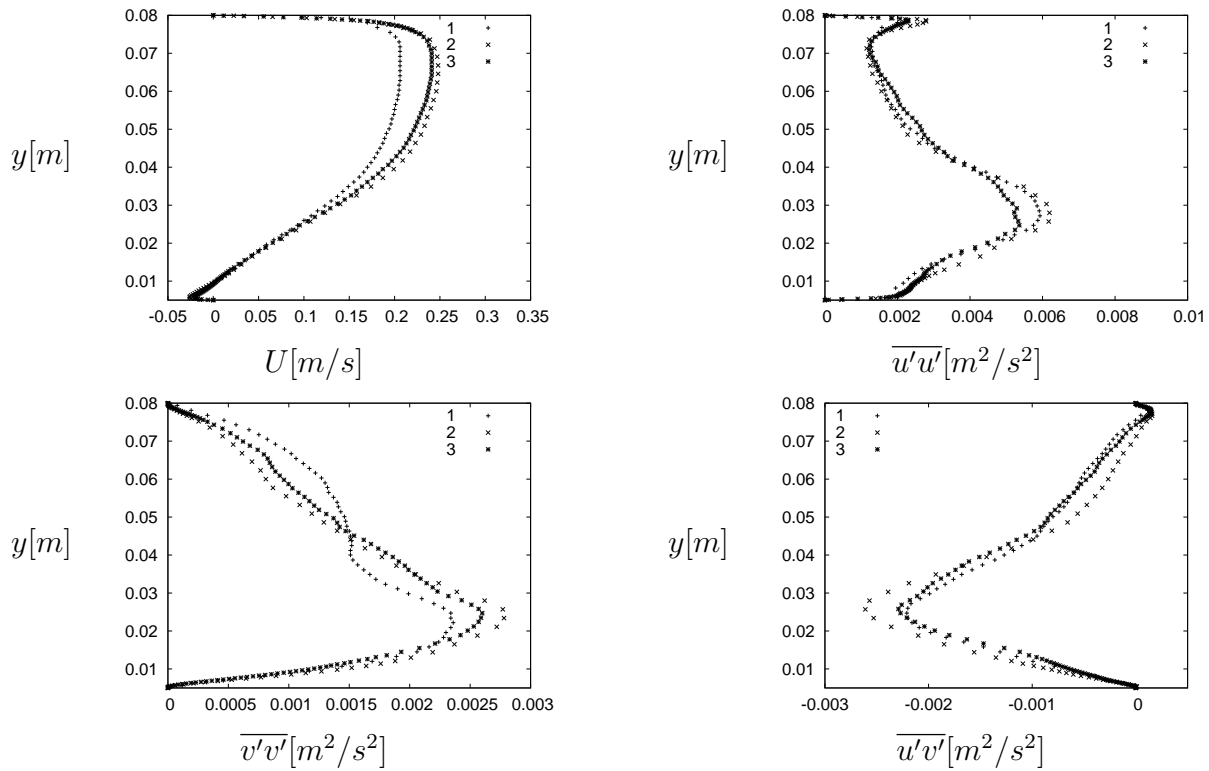


Abbildung 8.7: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0, 1125 \text{ m}$

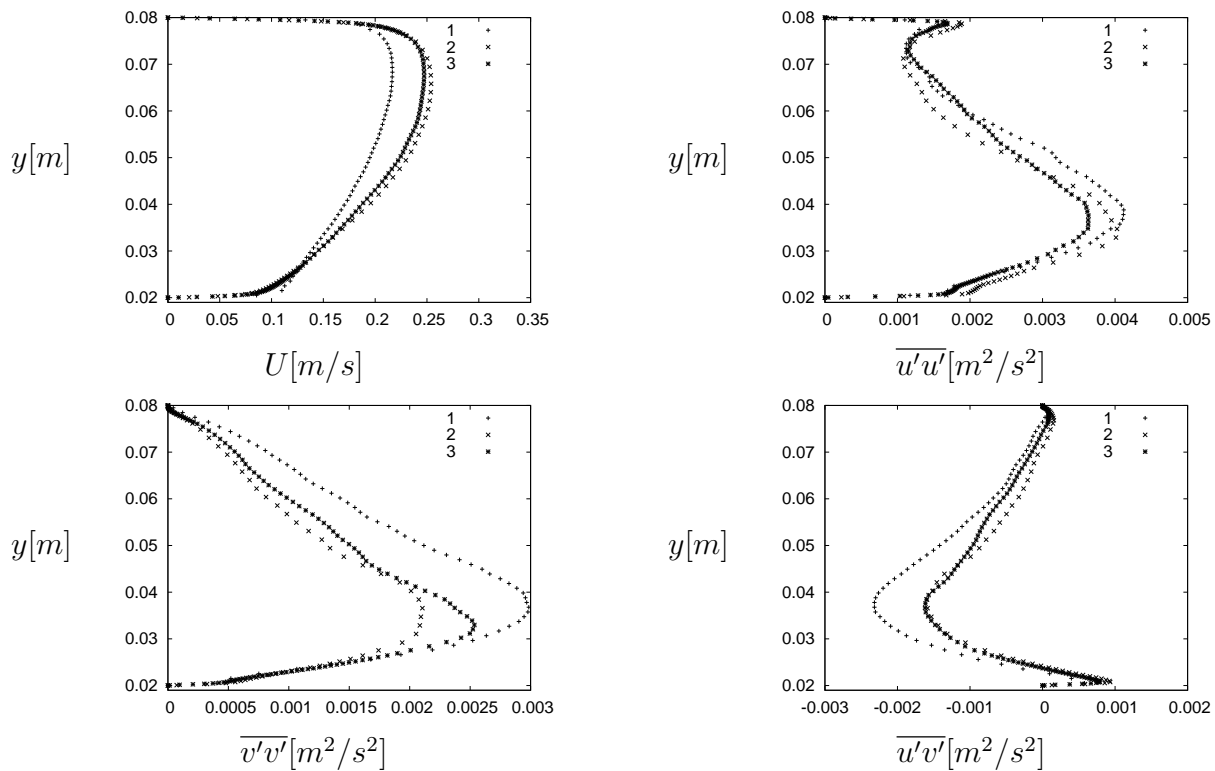


Abbildung 8.8: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0, 15 \text{ m}$

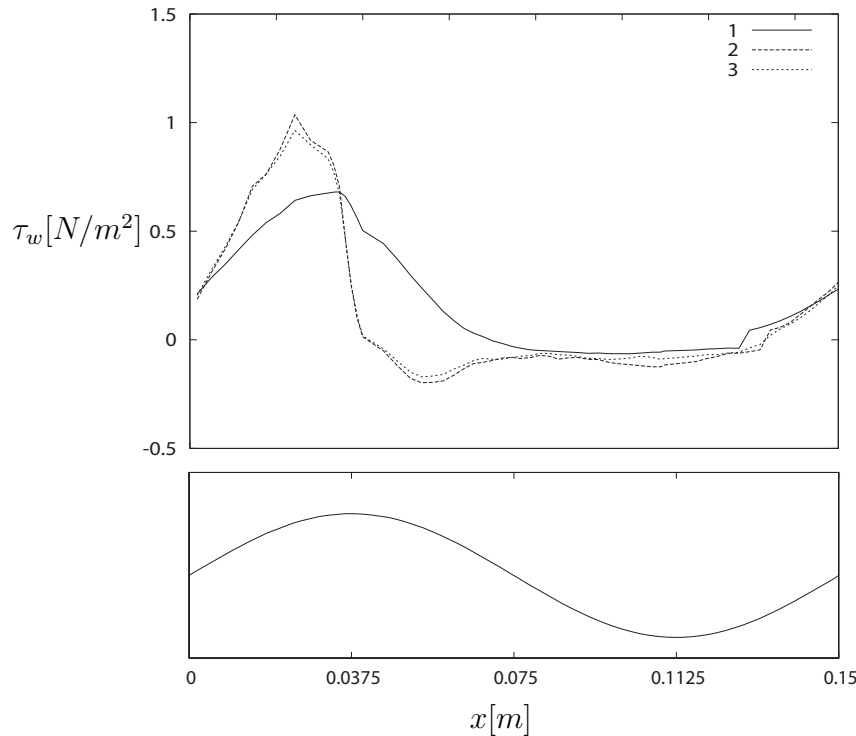


Abbildung 8.9: Wandschubspannung entlang des Kanals

Vergleicht man die Wandschubspannungen in Abbildung 8.9 entlang des Kanals, ist zu erkennen, dass die Ergebnisse von Rechnung 2 und Rechnung 3 keine nennenswerten Unterschiede aufweisen, da bei beiden Rechnungen der erste Gitterpunkt in der viskosen Unterschicht liegt. Vergleicht man die Ergebnisse jedoch mit Rechnung 1, wird deutlich, dass Rechnungen, in denen der erste Gitterpunkt nicht in der viskosen Unterschicht liegt, zu schlechten Ergebnissen der Wandschubspannungen führen und ein Wandmodell eingesetzt werden muss. Denn wird der wandnahe Bereich nicht ausreichend fein aufgelöst, wird die Produktion turbulenter kinetischer Energie, die zum großen Teil in diesem wandnahen Bereich stattfindet, zu gering vorhergesagt und die Wandreibung unterschätzt. Es ist zu erkennen, dass bei der grob aufgelösten LES die Rezirkulationszone wesentlich kürzer ist, da der Ablösepunkt sich weiter stromabwärts befindet. Die turbulenten Fluktuationen weisen im Inneren des Gebietes deutlich höhere Werte auf.

8.1.3 Beschreibung der Testfallgeometrie - Level Set Methode

In x -Richtung besitzt das Rechengebiet eine Ausdehnung von 30 cm und in z -Richtung von 15 cm. Der Abstand der beiden Platten beträgt 8 cm. Die zwei Strömungsgebiete werden bei $y = 2$ cm durch eine zweidimensionale Sinuswelle getrennt. Die Sinuswelle wird ebenfalls über Funktion 8.3 beschrieben und weist, identisch zum Referenzfall, eine Amplitude von 1,5 cm und eine Wellenlänge von 15 cm auf. Die Strömung besitzt, wie die Referenzrechnung, eine Reynoldszahl von 6000, die ebenfalls auf die halbe Kanalhöhe bezogen ist.

Anhand der Referenzrechnung konnte bestätigt werden, dass ein fein aufgelöstes Gitter nötig ist, um gute Ergebnisse zu erzielen. Diesen Ergebnissen entsprechend wurde für die Berechnung mit der Level Set Methode ein Gitter gewählt, das im Bereich der $G = 0$ - Isofläche verfeinert wird. Da sich die Oberfläche zeitlich ändert und mit einem blockstrukturierten Gitter gerechnet wird, ist es nicht möglich, gezielt den Wandbereich logarithmisch zu verfeinern. Im vorliegenden Testfall ist das Gebiet, in dem die Riffel wandern bekannt. Dieser Bereich wird daher feiner diskretisiert. Abbildung 8.10 zeigt das für die Berechnung mit der Level Set Methode verwendete Gitter.

Das Gitter besitzt eine Auflösung von $120 * 200 * 30$ Gitterzellen in x -, y - und z -Richtung. Dies ergibt eine Gesamtanzahl von 720000 Gitterzellen.

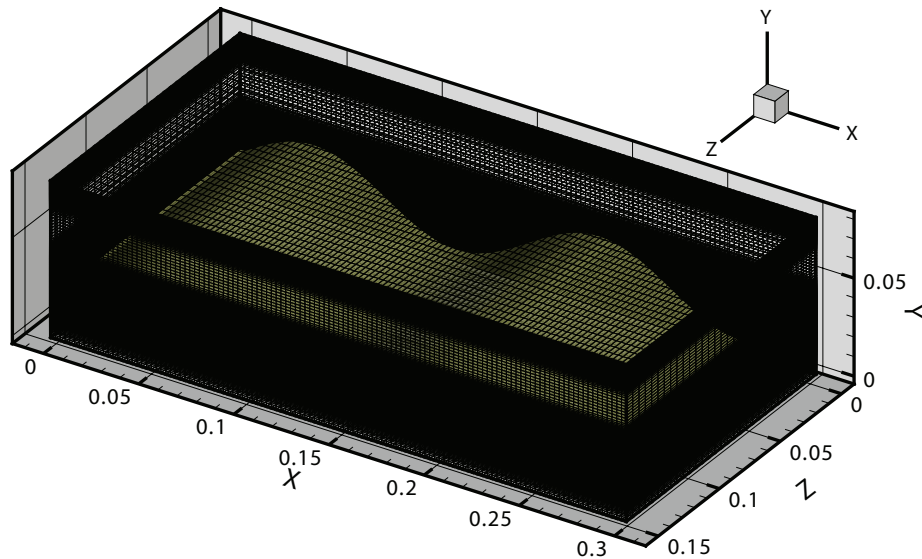


Abbildung 8.10: Darstellung der Sinuswelle und der Gitterverfeinerung in der Region bei $G = 0$

8.1.4 Ergebnisse der Testfallgeometrie - Level Set Methode

Abbildung 8.11 kann entnommen werden, dass mit dem in Abbildung 8.10 dargestellten Gitter über der Luvseite des Riffels, im Bereich der größten Strömungsgeschwindigkeiten, der erste Gitterpunkt bei $y^+ < 5$ liegt. Somit liegt dieser Punkt gerade noch in der viskosen Unterschicht.

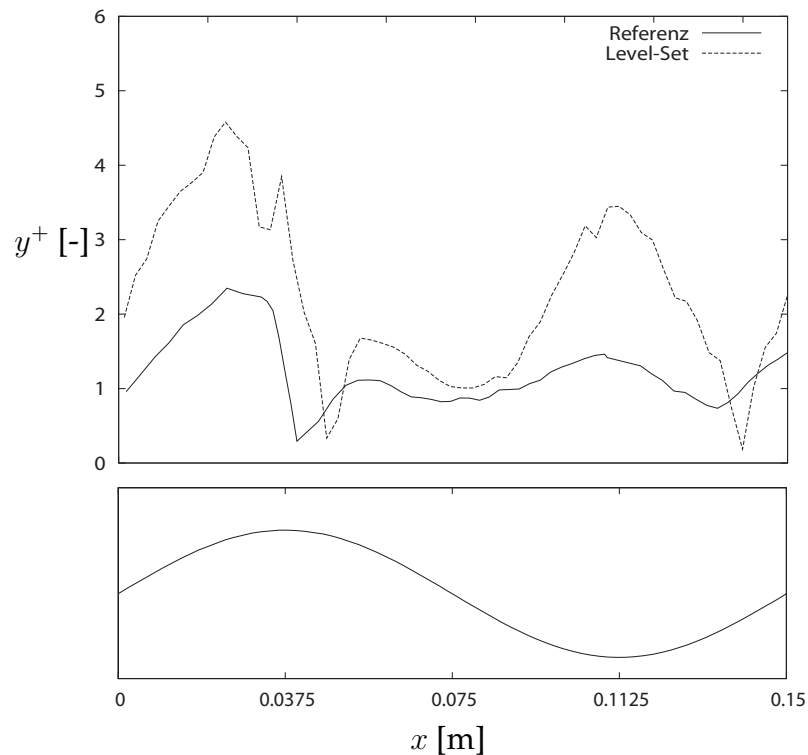


Abbildung 8.11: Dimensionsloser Wandabstand der wandnächsten Gitterzelle

Betrachtet man die Geschwindigkeitsprofile und die turbulenten Statistiken an verschiedenen Koordinaten entlang der x -Achse (siehe Abbildungen 8.12 bis 8.15), werden Diskrepanzen sichtbar. Wie schon bei den Referenzrechnungen beobachtet wurde, ist der Einfluss der Auflösung auf die turbulenten Statistiken größer als auf die Geschwindigkeitsprofile. Dabei ist zu erkennen, dass die turbulenten Fluktuationen der Referenzrechnung in wandnormaler Richtung höhere Werte besitzen als bei der Level Set Methode. Die turbulenten Fluktuationen in Strömungsrichtung hingegen tendieren bei der Level Set Methode zu höheren Werten. Somit werden bei der Level Set Methode die turbulenten Fluktuationen in y -Richtung überschätzt und in x -Richtung unterschätzt.

Bei den Wandschubspannungen (Abbildung 8.16) entlang des Riffels werden trotz der unterschiedlichen Auflösung im Vergleich zur Referenzrechnung sehr gute Ergebnisse erzielt. Der Ablösepunkt liegt bei der Level Set Methode nur marginal hinter der der Referenzrechnung. Dies zeigt, dass die implementierte Level Set Methode zur Beschreibung der Riffelwanderung geeignet ist, da die wesentliche Größe, die den Sedimentations- und Erosionsprozess beschreibt, durch die Wandschubspannung bestimmt wird.

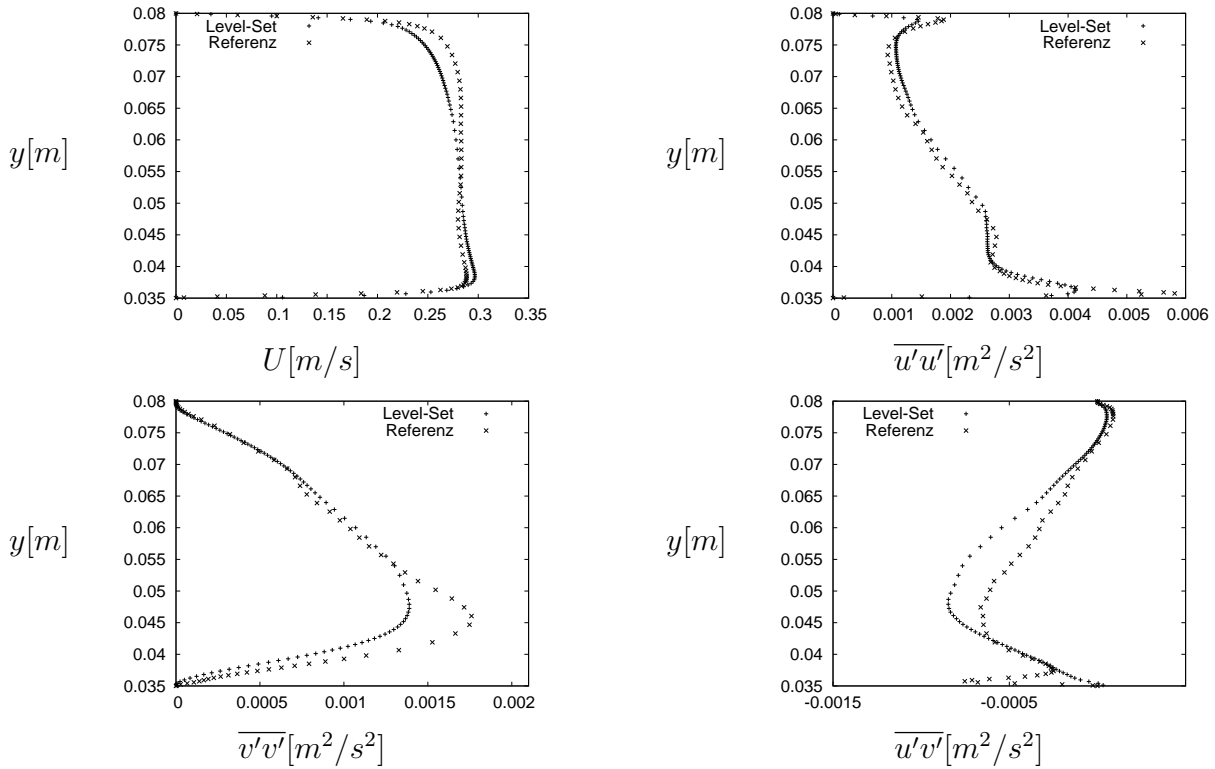


Abbildung 8.12: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,0375 \text{ m}$

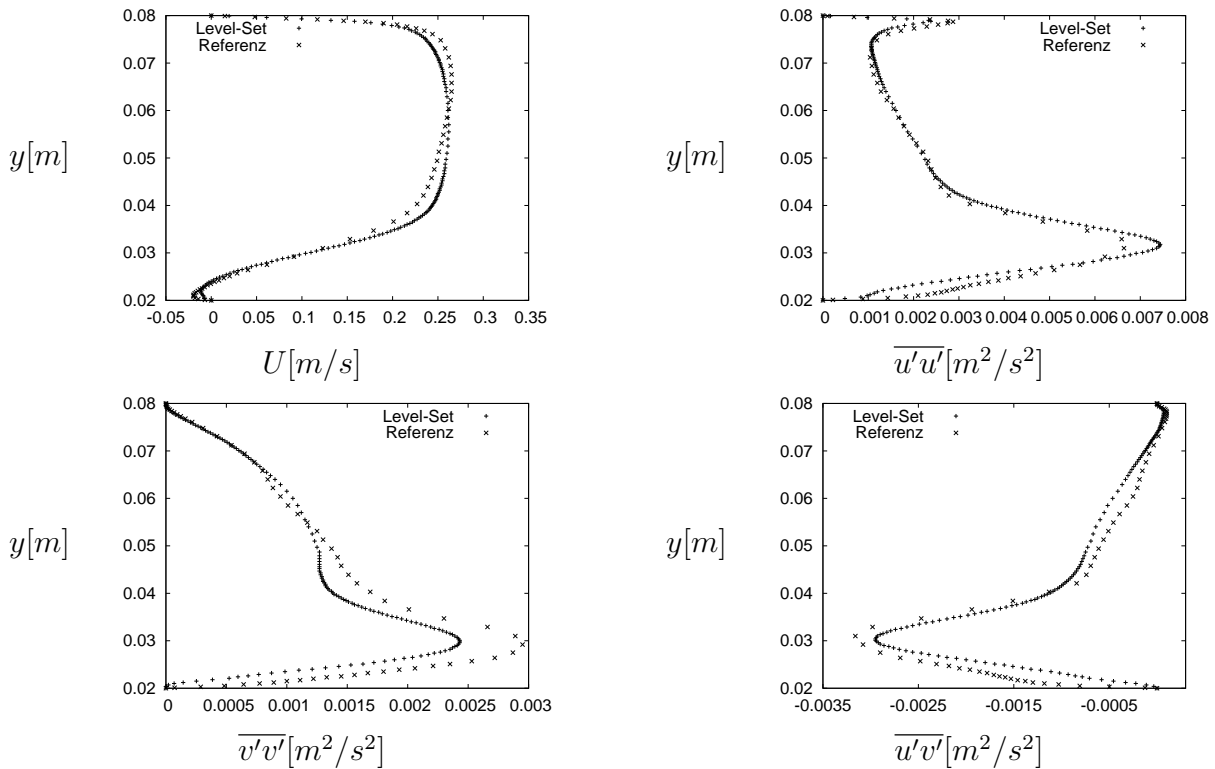


Abbildung 8.13: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,075 \text{ m}$

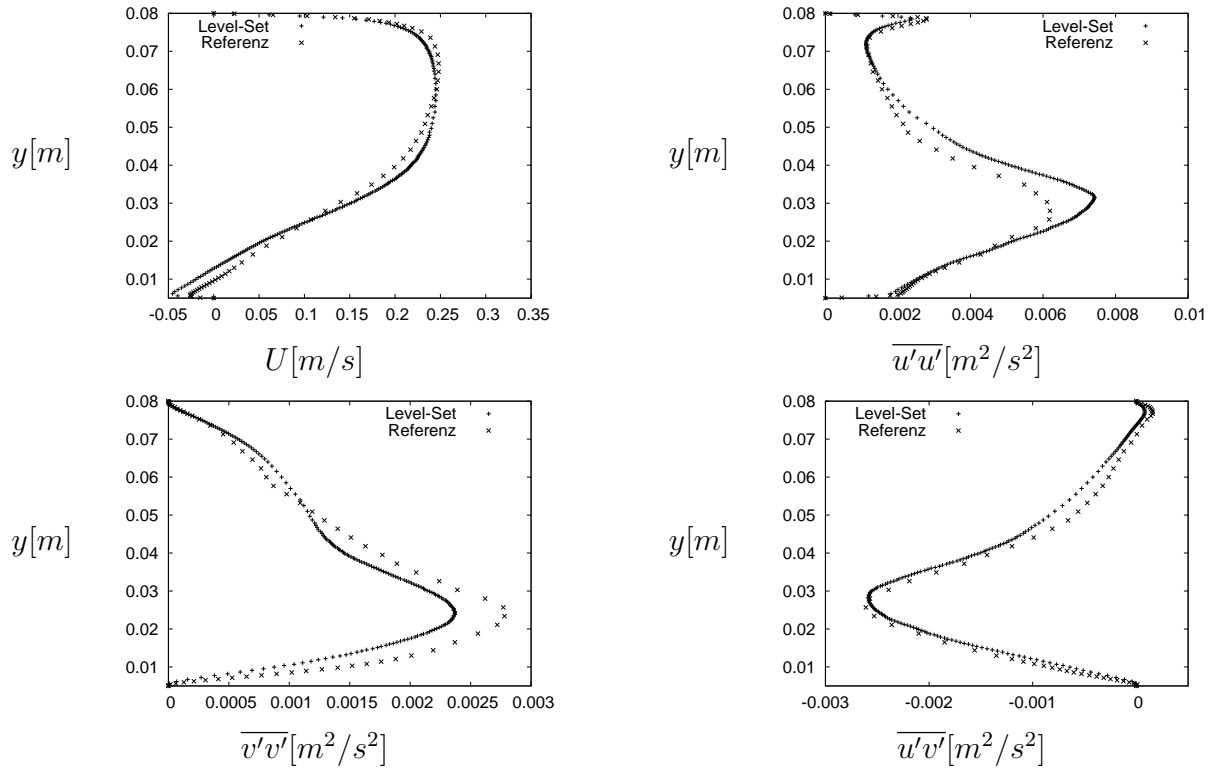


Abbildung 8.14: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,1125 \text{ m}$

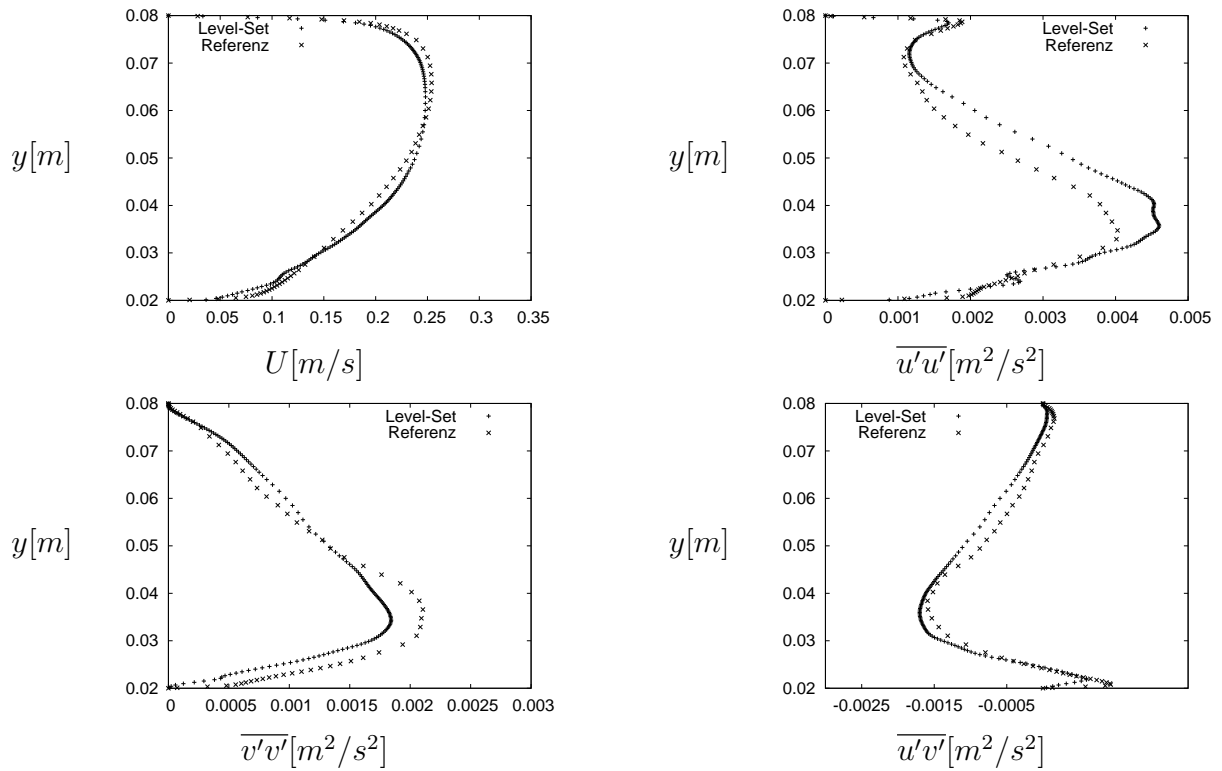


Abbildung 8.15: Mittlere Geschwindigkeiten und turbulente Statistiken an der Position $x = 0,15 \text{ m}$

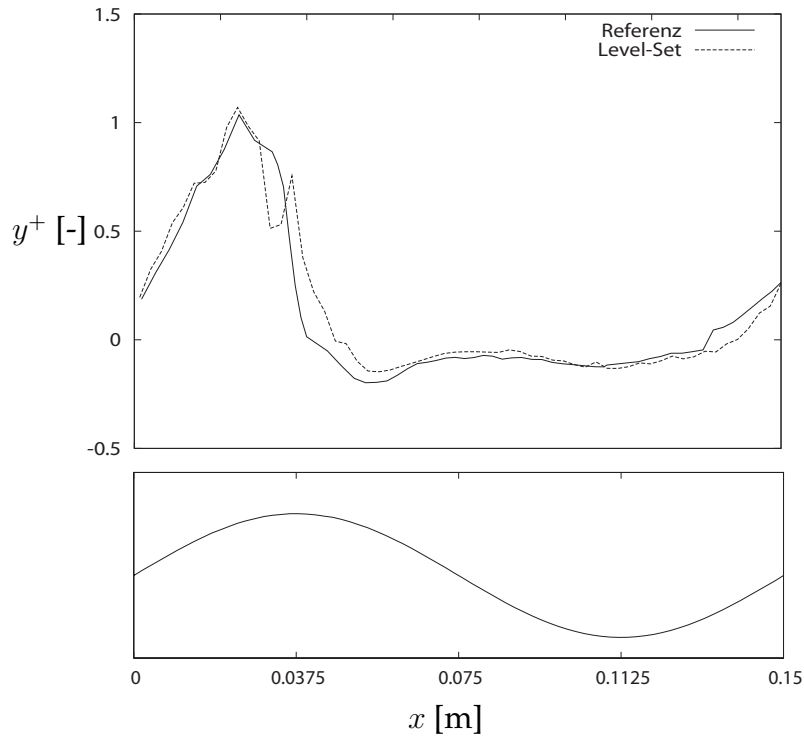


Abbildung 8.16: Wandschubspannung entlang des Kanals

8.2 Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes

Für die Modellierung der Riffelbewegung ist es erforderlich, das Strömungsfeld zu kennen. Aufgrund fehlender experimenteller Ergebnisse für den zu betrachtenden Testfall wird das Strömungsfeld im Folgenden berechnet und qualitativ verifiziert.

Für die Berechnungen wird eine aus Laborversuchen ermittelte Riffelkontur vorgegeben. Die von Haslinger (Haslinger 1993) extrahierte Riffelfunktion wurde wie folgt approximiert:

$$\frac{y_k}{K} = 1 - 2,107 \cdot \sin \left[1,15 \cdot \exp \left(-\frac{2\pi x}{3L} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right]. \quad (8.4)$$

Das Modellierungsgebiet besitzt eine Ausdehnung von 15 cm in x -Richtung und in y -Richtung sowie von 7,5 cm in z -Richtung. Die Riffelkrone liegt bei diesem Testfall bei $x = 0,03 \text{ m}$. In der Literatur wird meistens die x -Komponenten mit Hilfe der Riffelhöhe normiert. Dabei gilt, dass sich die Krone bei $x/K = 0$ befindet. Zum besseren Vergleich der Simulationsergebnisse mit den in der Literatur verwendeten Angaben, wird im Folgenden die x -Komponente jeweils in m und in der dimensionslosen Form x/K angegeben.

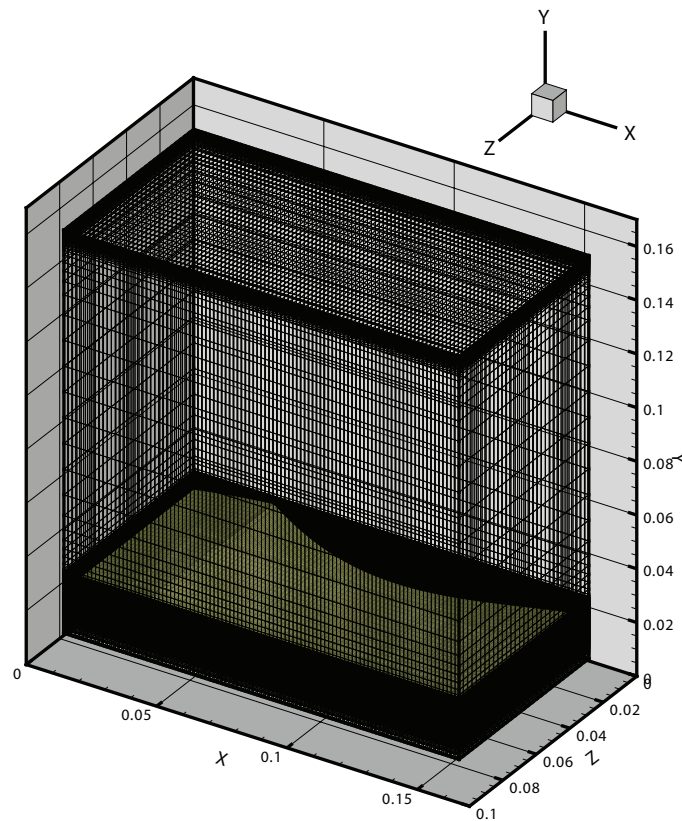


Abbildung 8.17: Darstellung der Riffelkontur und der Gitterverfeinerung im Bereich der Nullkontur

Das verwendete Gitter besteht aus 100 Kontrollvolumina in x -Richtung, aus 120 Kontrollvolumina in y -Richtung und aus 30 Kontrollvolumina in z -Richtung. Die Gesamtanzahl der Gitterpunkte beträgt 360000. Es wurde, wie bei den anderen Testfällen, eine Verfeinerung des Gitters im Bereich der Riffelkontur vorgenommen. Die mittlere Geschwindigkeit v_m beträgt 0.4 m/s und die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.002 \text{ s}$.

8.2.1 Zeitlich gemitteltes Strömungsfeld

Die Wandschubspannung kann wie bereits erwähnt aus dem Gradienten der Tangentialgeschwindigkeit normal zur Sohle berechnet werden (siehe Gleichung 8.1). Anhand Abbildung 8.18 ist erkennbar, an welchen Stellen die Wandschubspannung τ_w den Wert Null annimmt und dort sich folglich der Ablöse- bzw. der Anlegepunkt des Rückstrombereiches befindet. Hervorzuheben ist dabei, dass dieser Bereich zwei Extrema aufweist. Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass das globale Minimum bei $x = 0.0765 \text{ m}$ ($x/K = 3,1$) auftritt, welches ca. 70% der Ablösezonenlänge entspricht. Dieser Wert liegt etwas unterhalb der in der Literatur aufgeführten Werten von 80%.

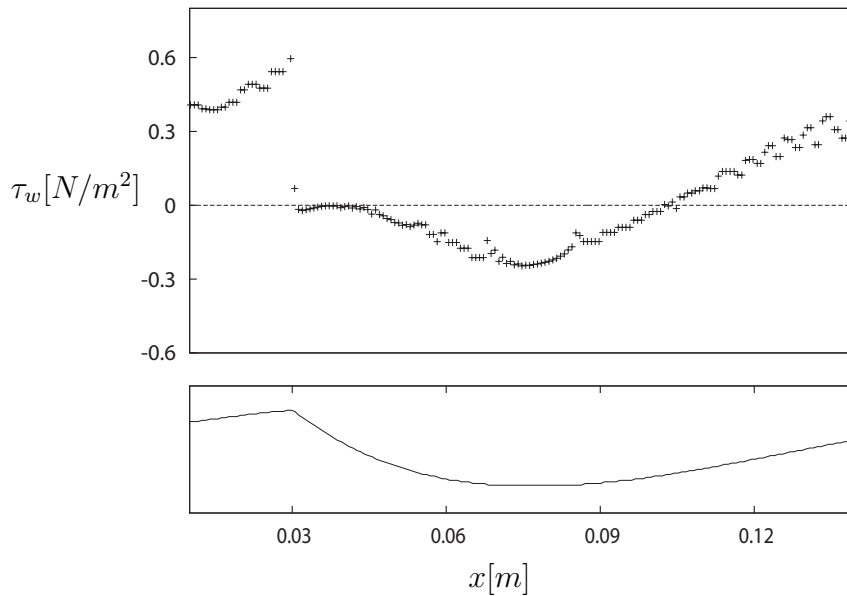


Abbildung 8.18: Wandschubspannung entlang des Riffels

Generell ist hier anzumerken, dass der Ablösepunkt sich nicht direkt am Kamm, sondern etwas dahinter bei ca. $x = 0.0306 \text{ m}$ ($x/K = 0,04$) befindet. Der Anlegepunkt befindet sich bei $x = 0.1005 \text{ m}$ ($x/K = 4.7$). Dies stimmt sehr gut mit den Angaben aus der Literatur von van Mierlo/de Ruiter ($x/K = 5$) und von Raudkivi ($x/K = 4,7$) überein. Stromabwärts des Anlegepunktes nimmt die Wandschubspannung mit derselben Steigung wie vom globalen Minimum zum Nullpunkt zu, bis die Wandschubspannung den Maximalwert erreicht. Dieser Punkt liegt bei ca. $x = 0.1785 \text{ m}$ ($x/K = 9,9$). Danach sinkt der Wert wieder steil ab, bis zum Erreichen des ersten lokalen Extremum im Ablösebereich.

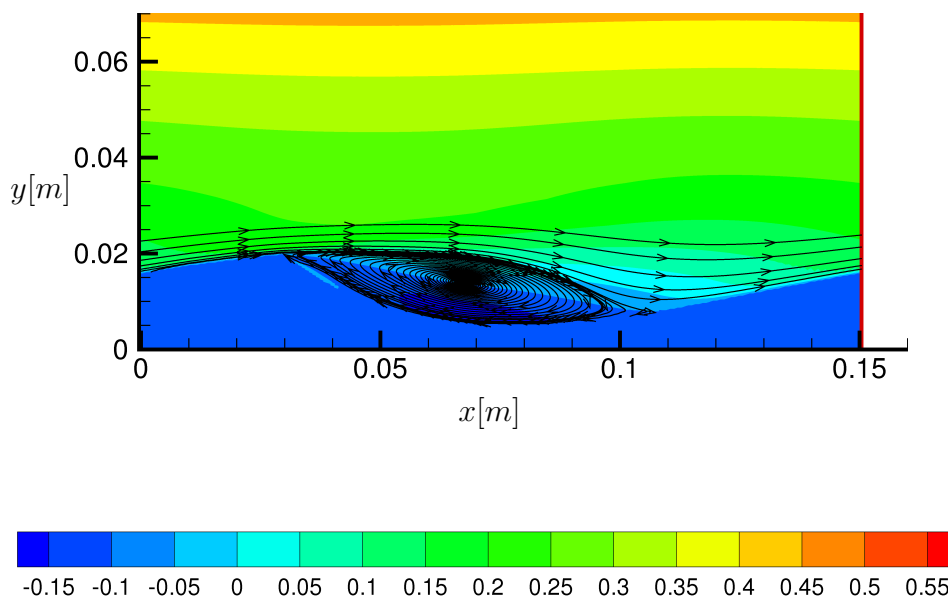


Abbildung 8.19: mittleres Geschwindigkeitsfeld [m/s] mit Stromlinien

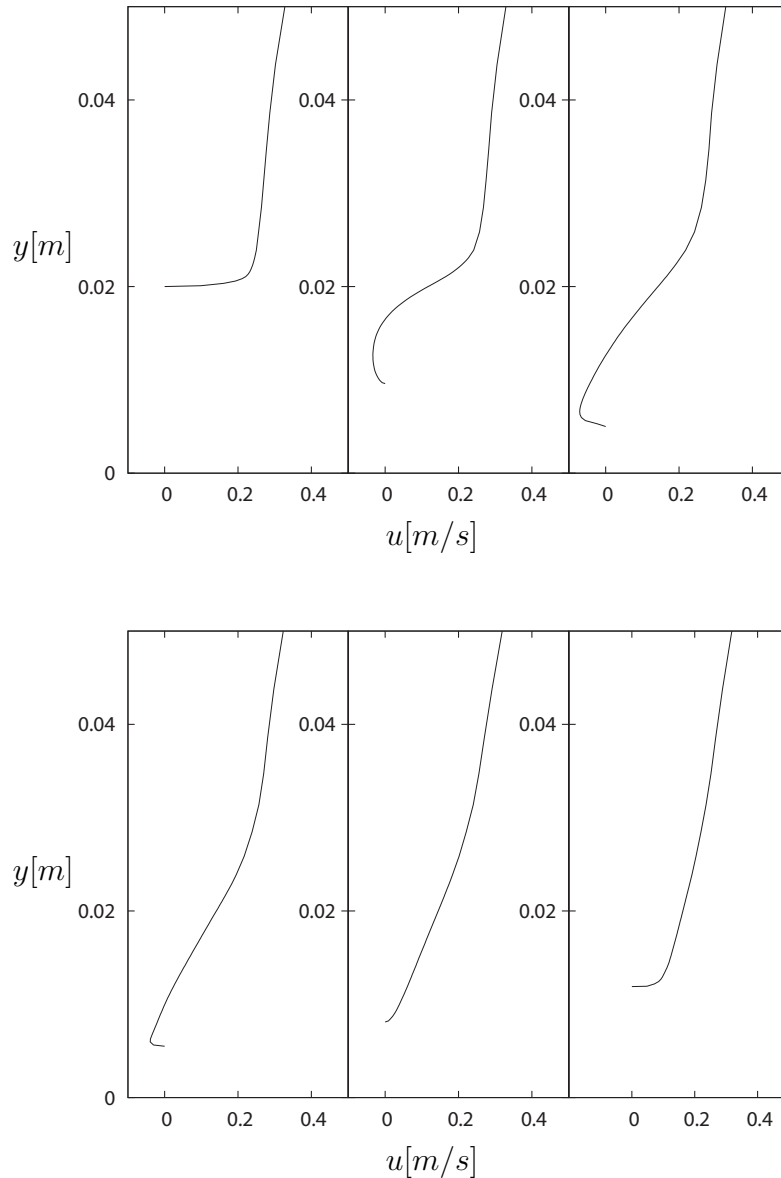


Abbildung 8.20: Geschwindigkeitsprofile entlang des Riffels bei $x = 0,03 \text{ m}$, $x = 0,05 \text{ m}$, $x = 0,07 \text{ m}$, $x = 0,09 \text{ m}$, $x = 0,11 \text{ m}$ und $x = 0,13 \text{ m}$

Anhand der Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 8.20 und der Stromlinien in Abbildung 8.19 ist ebenfalls die voll ausgebildete Rezirkulationszone hinter der Krone erkennbar. Die Rückstromwalze wird durch eine Nulllinie in zwei Bereiche unterteilt. Im Bereich unterhalb der Nulllinie findet in der Ablösezone eine Rückströmung statt. Die Geschwindigkeit nimmt vom Nullwert an der Sohle bis zu einem lokalen Extremum ab und steigt dann wieder bis zu dem Wert Null an. Der Bereich der stärksten Rückströmung ist unterhalb des Auges der Rückstromwalze bei $x = 0,0765 \text{ m}$ ($x/K = 3,1$). Die betragsmäßig größten Geschwindigkeiten betragen 17% der mittleren Strömungsgeschwindigkeit. Dies deckt sich mit den in der Literatur beobachteten Werten von 10 – 20%. Oberhalb dieser Nulllinie zeigt die horizontale Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung. Sie nimmt mit größer werdendem Abstand von der Nulllinie zu und erreicht bis zur Trennstromlinie ca. 30% der middle-

ren Geschwindigkeit. Stromabwärts ist die horizontale Geschwindigkeit durchweg positiv. Hier erfährt die Geschwindigkeit aufgrund der Querschnittsverengung eine Beschleunigung und wächst entlang des Luvhanges an. Das Maximum der horizontalen Geschwindigkeitskomponente liegt etwas vor der Kronenspitze bei $x = 0.1785\text{ m}$ ($x/K = 9,9$).

Variation der mittleren Durchflussgeschwindigkeit

Im Folgenden werden die Auswirkungen einer erhöhten Fließgeschwindigkeit auf das Strömungsfeld und auf die daraus resultierenden Wandschubspannungen untersucht. Abbildung 8.21 kann entnommen werden, dass eine Fließgeschwindigkeitserhöhung nur einen geringen Einfluss auf die Position des Wiederanlegepunktes besitzt. Für die Lage des Anlegepunktes der Rezirkulationszone ist folglich die Geometrie des Riffels verantwortlich. Dieses Ergebnis wird auch von Vanoni und Hwang, sowie von Karahan und Peterson beobachtet (Wallisch 1996). Der Betrag der Wandschubspannung nimmt am Lee- und Luvhang mit einer Erhöhung des Durchflusses zu. Die Änderungsrate im Leehang entspricht ungefähr der Änderungsrate im Luvhang. Somit bleibt das Verhältnis der Wandschubspannung von Luv- zu Leehang, bei einer Erhöhung der Fließgeschwindigkeit, nahezu konstant.

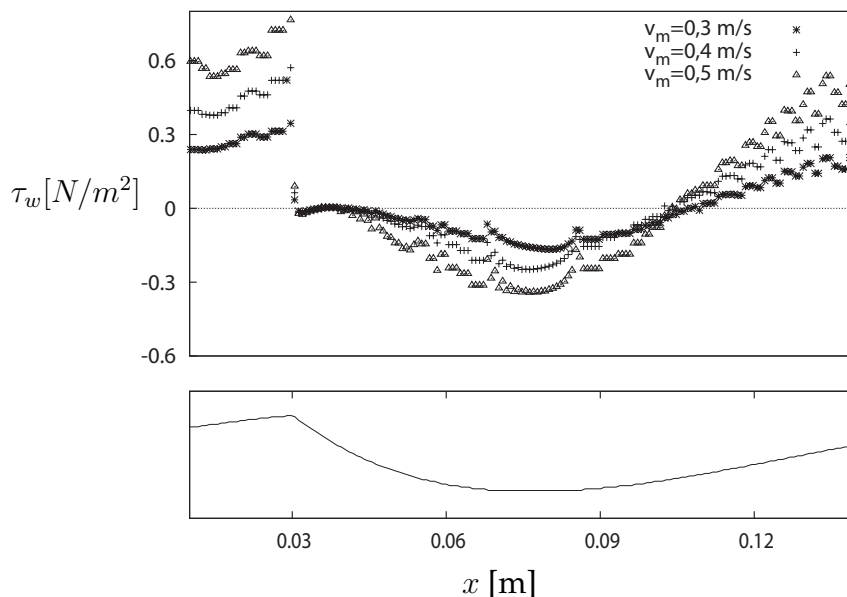


Abbildung 8.21: mittlere Wandschubspannung entlang des Riffels bei unterschiedlichen Durchflussgeschwindigkeiten

Variation der Riffelsteilheit

Die Riffelsteilheit $\lambda = K/L$ gibt keine Auskunft über die Riffelform, sondern beschreibt das Verhältnis der Riffelhöhe zur Riffellänge. Folglich gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine Variation der Riffelsteilheit hervorzurufen. Im untersuchten Fall wird die Riffelhöhe bei festgehaltener Riffellänge variiert. Die Lage des Riffeltals wird beibehalten und die Krone stromabwärts verschoben und folglich ein flacherer Leehang erzeugt.

Abbildung 8.22 zeigt eine Verlängerung der Rezirkulationszone bei zunehmender Riffelsteilheit. Die Veränderung des Minimums in der Mulde ist gering. Im Gegensatz hierzu nimmt das Maximum der Wandschubspannung entlang des Luvhanges mit einer Erhöhung der Riffelsteilheit zu. Dies kann auch bei den Versuchen von Zilker und Hanratty beobachtet werden (Wallisch 1996).

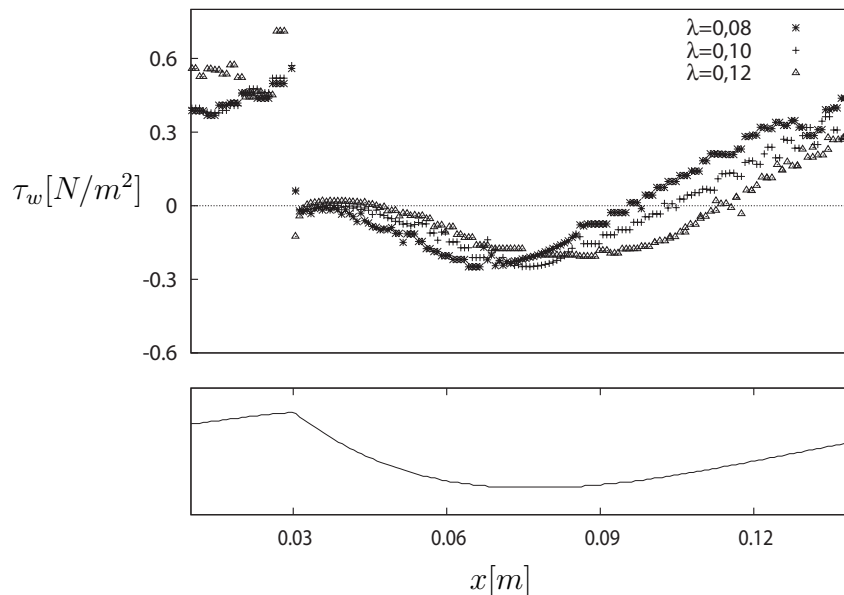


Abbildung 8.22: mittlere Wandschubspannung entlang des Riffels bei unterschiedlichen Riffelsteilheiten

8.2.2 Instationäres Strömungsfeld

Das momentane Geschwindigkeitsfeld weist eine hohe Instationarität auf. Es besitzt im Gegensatz zum gemittelten Geschwindigkeitsfeld teilweise mehrere Zirkulationszonen. Dabei ist in Abbildung 8.23 zu erkennen, dass sich hinter der Krone eine Scherströmung ausbildet. Die Strömung löst nach der Krone ab und es bilden sich Wirbel, die stromabwärts wandern. Eine weitere Rücklaufzone existiert in der Mulde. Auch diese wandert und ist nicht lokal stationär. Allerdings wird sie durch den Anstieg des Luvhanges in Strömungsrichtung begrenzt und wandert nicht ab. Man kann hier auch von einer passiven Beeinflussung der Rezirkulationszone sprechen (Neumann 2003). Abbildung 8.23 ist zu entnehmen, dass die kleineren Wirbel, die sich an der Krone ablösen, teilweise oberhalb, unterhalb oder in den sich in der Mulde befindlichen großen Wirbel wandern und sich dort auflösen. Die hohe Instationarität des Geschwindigkeitsfeldes wird vor allem am Leehang unmittelbar und im Bereich des Wiederanlegepunktes deutlich.

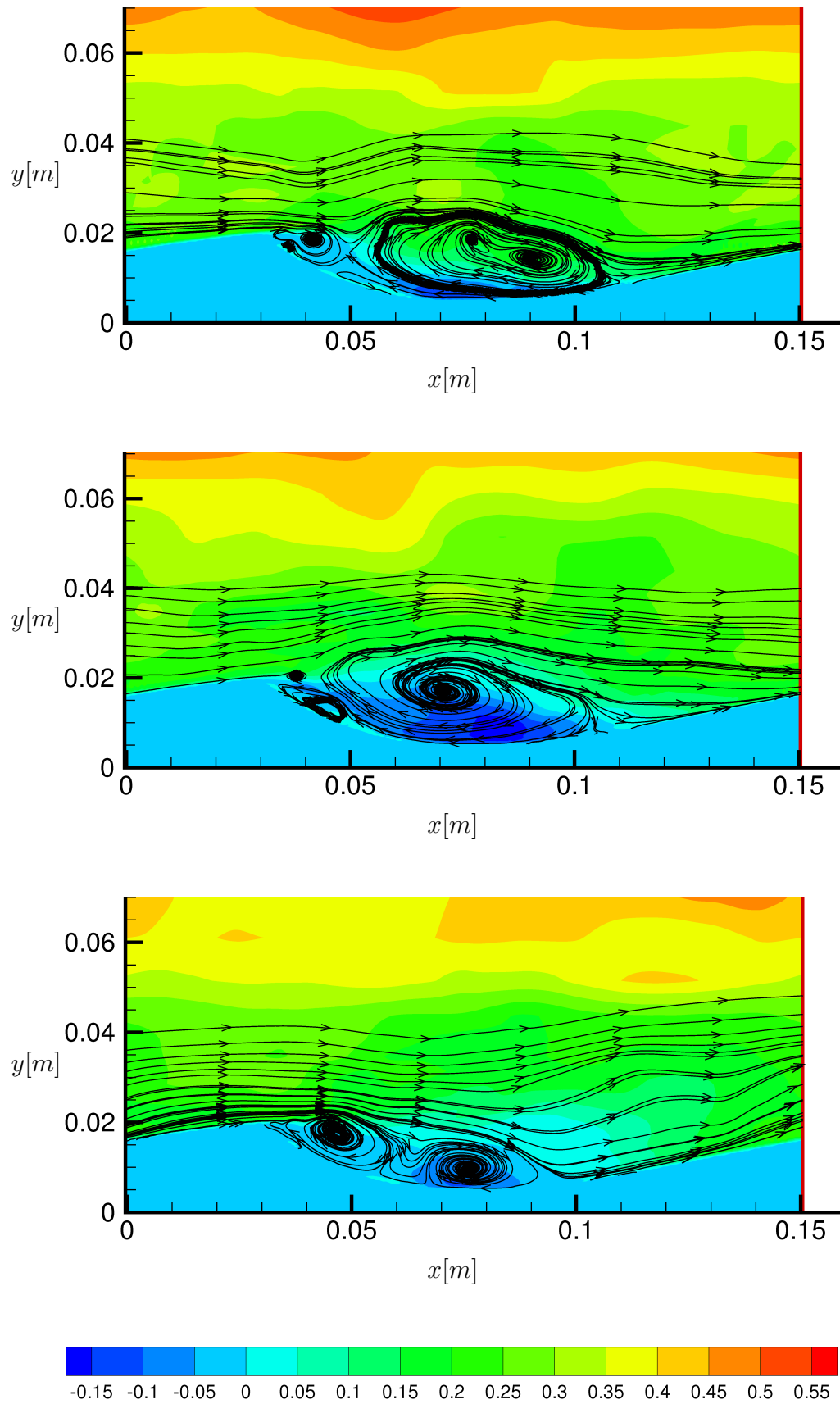


Abbildung 8.23: momentane Geschwindigkeitsfelder $[m/s]$ mit Stromlinien zu unterschiedlichen Zeitpunkten

8.3 Konzentrationsverteilung

Für die Berechnung der Testfallserien wird die durch Gleichung 8.4 approximier- te Riffelgeometrie vorgegeben. Die in FASTEST-3D bestehende Konzentrationsglei- chung wird gemäß Gleichung 5.3 modifiziert und die Konzentrationsverteilung des Sediments in Suspension im Testgebiet analysiert.

Das Testgebiet besitzt eine Ausdehnung von 15 cm in x -Richtung, in y -Richtung so- wie in z -Richtung. Das verwendete Gitter besteht aus 100 Kontrollvolumina in x - Richtung, aus 120 Kontrollvolumina in y -Richtung und 60 Kontrollvolumina in z - Richtung. Die Gesamtanzahl der Gitterpunkte beträgt 720000. Es wurde, wie bei den anderen Testfällen, eine Verfeinerung im Bereich der Riffelkontur durchgeführt. Auch bei diesen Testfallserien wurde mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v_m = 0.4 \text{ m/s}$ und einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ gerechnet.

Zur Analyse der Konzentrationsverteilung werden drei verschiedene Pick-up Glei- chungen verwendet.

- Pick-up Gleichung von Yalin (1)
- Pick-up Gleichung von Einstein (2)
- Pick-up Gleichung von van Rijn (3)

Die Konstanten in den Gleichungen von Einstein und Yalin müssen wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, mit Hilfe von Versuchen bestimmt werden. Im Rahmen dieser Ar- beit werden die von van Rijn bestimmten Konstanten verwendet. Der α -Wert wird bei dem Modell von Einstein zu $7,7 \cdot 10^{-3}$ gesetzt und bei dem Modell von Yalin zu $8,8 \cdot 10^{-3}$.

Den Modellierungen liegt die Annahme zugrunde, dass das Sohlmaterial aus einem Sand mit einheitlichem Korndurchmesser besteht. Als Sediment wird ein Sand mit einem Durchmesser von $100 \mu\text{m}$ gewählt.

Für ein Sediment dieses Korndurchmessers gilt: $w_s/u_* < 0,7$. Nach Breusers und Raudkivi (Breusers & Raudkivi 1991) kann davon ausgegangen werden, dass der maßgebliche Transport in Suspension stattfindet und keine kohäsiven Kräfte auftre- ten.

Abbildung 8.26 ist zu entnehmen, dass zwei verschiedene Hauptabtragszonen exis- tieren. Entlang des Luvhanges wird Sediment abgetragen und über die Krone trans- portiert. Betrachtet man das Konzentrationsfeld, kann man die Scherströmung, die sich hinter der Krone ausbildet, erkennen. Kohärente Strukturen an dieser Stelle sind maßgeblich für die Ausbildung der Konzentrationsverteilung. Dies kann Abbildung 8.24 und Abbildung 8.25 entnommen werden. Obwohl das Testgebiet in z -Richtung homogen ist, zeigen die Abbildungen, dass die Sedimentkonzentration in z -Richtung variiert. Es bilden sich sogenannte Finger über der Krone aus. Diese Beobachtung deckt sich mit den Beschreibungen von Zedler und Street (Zedler & Street 2001). Da im Rahmen dieser Studie die Wanderung der Riffelstruktur zweidimensional unter-

sucht wird, muss im Folgenden die Konzentration über die z -Richtung gemittelt werden.

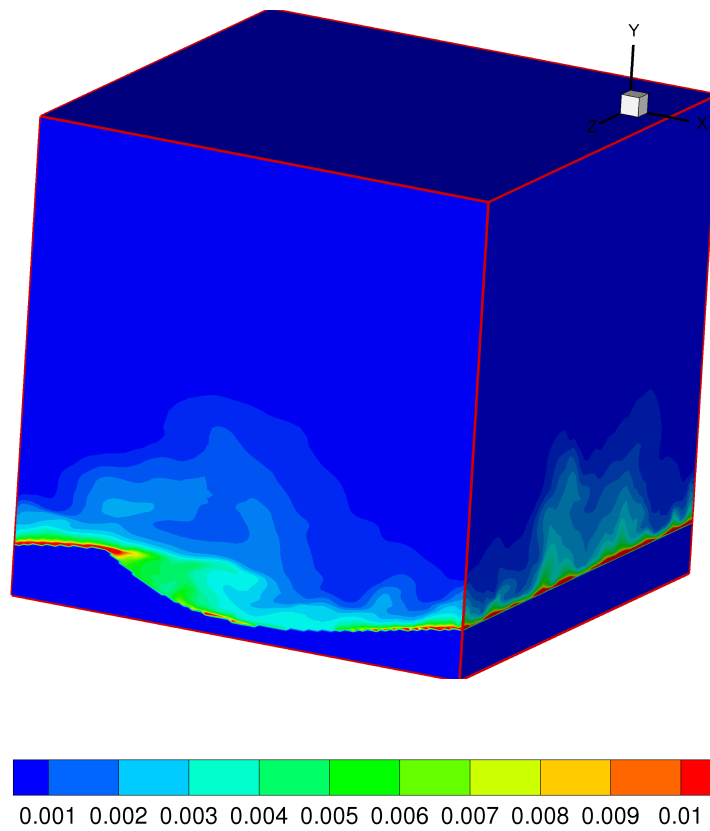


Abbildung 8.24: momentanes Konzentrationsfeld mit dem Modell von Yalin

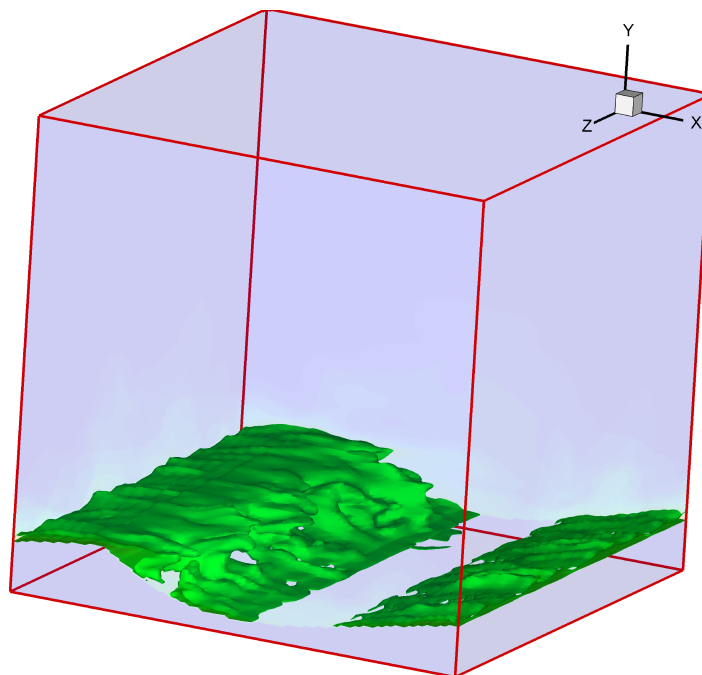


Abbildung 8.25: Isoflächen der Konzentration ($C=0.01$) mit dem Modell von Yalin

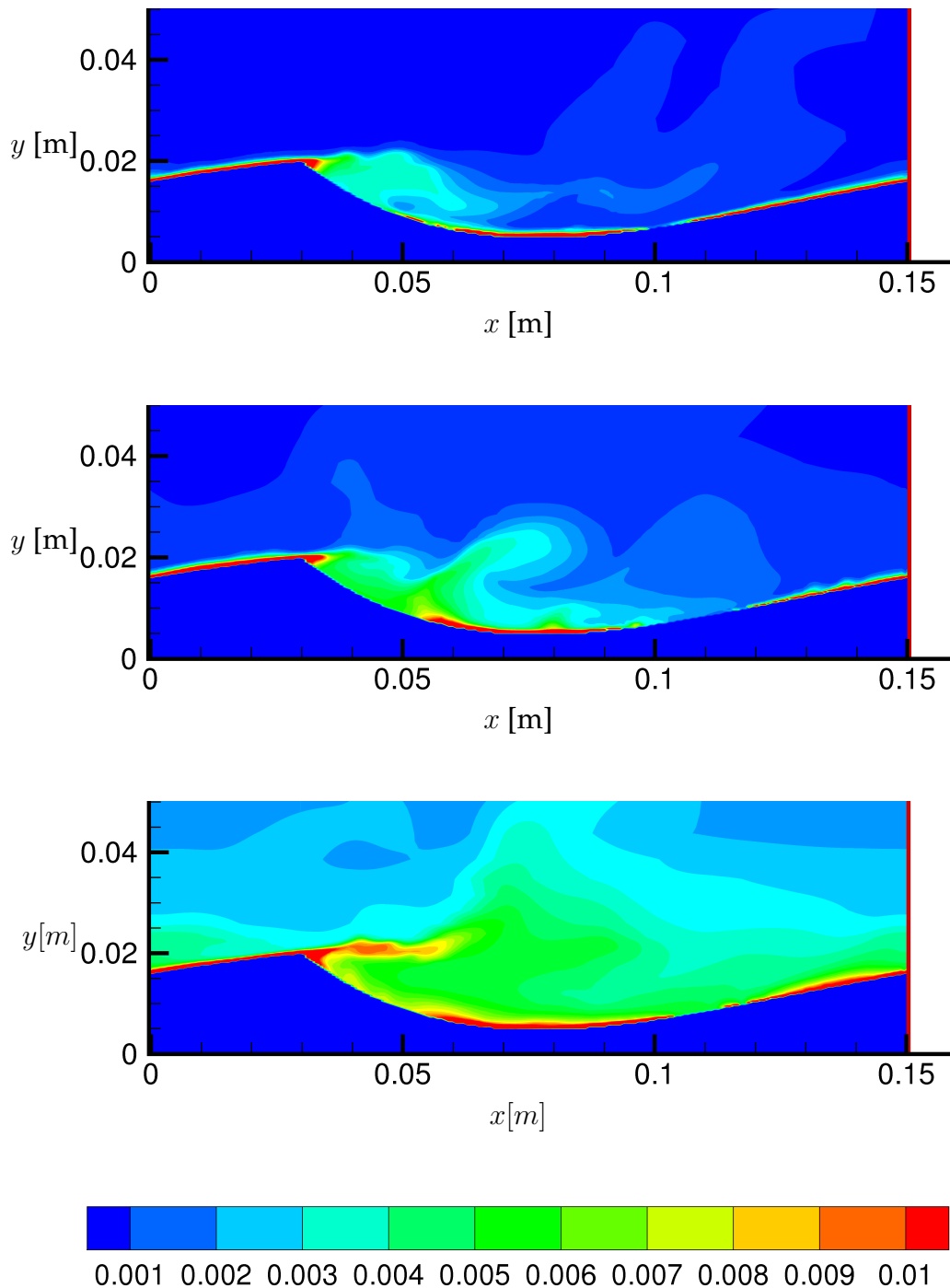


Abbildung 8.26: Darstellung der Konzentrationsverteilung entlang des Riffels bei $t = 1s$, $t = 2s$ und $t = 30s$ mit dem Modell von Yalin

Ein Teil des Sediments, welches über die Krone transportiert wird, gelangt aufgrund der Sinkgeschwindigkeit und turbulenter Fluktuationen in die Rücklaufwalze und wird entgegen der Hauptströmungsrichtung befördert.

Eine weitere Abtragszone befindet sich in der Mulde. Hier wird Sediment abgetragen und durch die Rücklaufwalze stromaufwärts transportiert. Somit nimmt die Konzentration im Leebereich zu und verstärkt die Sedimentation in diesem Bereich. Dies

führt zu einer Beschleunigung der Riffelwanderung. Der Anlegepunkt der Rücklaufwalze bedarf einer detaillierten Betrachtung. Bei den Berechnungen wird Sediment erodiert, wenn die Wandschubspannung über einen kritischen Wert, den Shieldsparameter, steigt. Madsen und Grant (Madsen & Grant 1976) zeigen, dass dieser Wert auch für instationäre Wandschubspannungen angewendet werden kann. Fraglich ist jedoch, ob der Shieldsparameter an diesem Anlegepunkt gültig ist. Der Shieldsparameter wurde in einer Strömung ohne Ablösungen bestimmt, in dem die Vertikalkomponente der Geschwindigkeit keinen wesentlichen Einfluss auf den Abtrag besitzt. Dies sieht am Anlegepunkt anders aus, da aufgrund der Rücklaufwalze eine nicht vernachlässigbare Vertikalkomponente auftritt. Dieser Einfluss wird im Kapitel 8.5 näher untersucht.

Anhand der Grafiken in Abbildung 8.26 kann gezeigt werden, dass die Konzentrationsfelder zeitlich stark variieren. Für die Modellierung der Riffelwanderung ist eine quasi stationäre Konzentrationsverteilung erforderlich. Um dies zu gewährleisten, wird die Gesamtkonzentrationsrate $(\sum(c_i * V_i))/V_{ges}$ über die Zeit abgetragen und solange gerechnet bis ein quasi stationärer Zustand erreicht ist. Abbildung 8.27 kann der Verlauf der Gesamtkonzentrationsrate entnommen werden. Da eine Riffellänge in einer Sekunde ca. 2,7 mal überströmt wird, ist ersichtlich, dass mehrere Riffellängen überströmt werden müssen, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt.

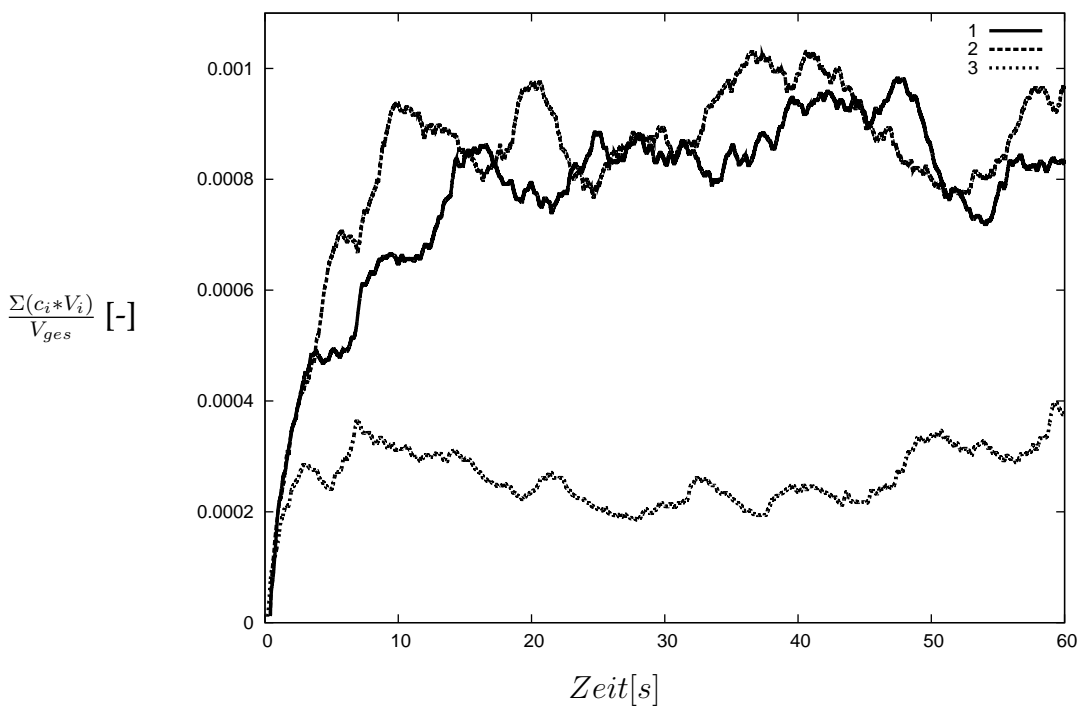


Abbildung 8.27: Zeitliche Entwicklung der Gesamtkonzentrationsrate im Strömungsgebiet mit dem Modell von Yalin (1), Einstein (2) und van Rijn (3)

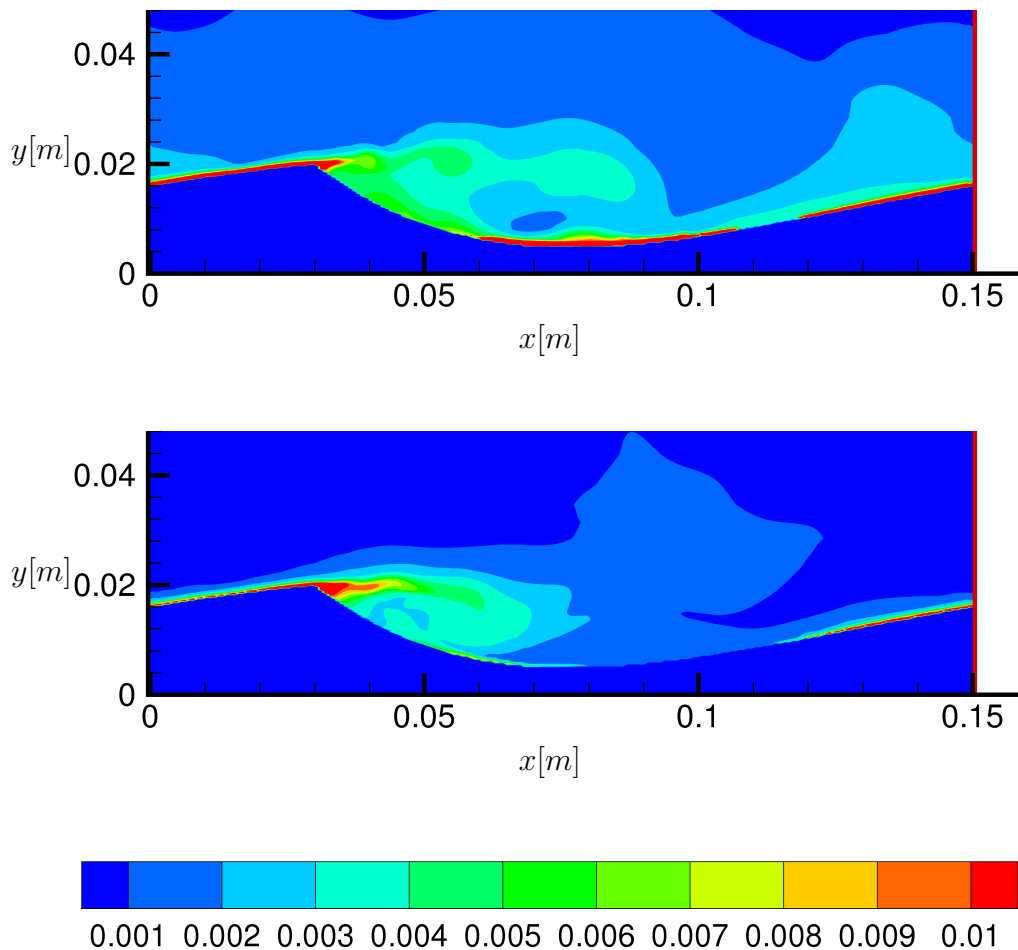


Abbildung 8.28: Darstellung der Konzentrationsverteilung entlang des Riffels im Gleichgewichtszustand (oben: mit dem Modell von Einstein, unten: mit dem Modell von van Rijn)

Vergleicht man die Gesamtkonzentrationen in Abbildung 8.27, die sich beim quasi stationären Zustand einstellen, erkennt man bei den Modellen von Einstein und Yalin betragsmäßig ähnliche Gesamtkonzentrationsraten. Verwendet man die Pick-up Gleichung von van Rijn, liegt die Gesamtkonzentrationsrate um den Faktor drei niedriger. Dieser Unterschied lässt sich auch anhand der Abbildungen 8.26 und 8.28 feststellen. Die Konzentrationen am Leehang sind bei den Berechnungen mit dem Ansatz von Yalin und Einstein wesentlich höher als mit dem Berechnungsansatz von van Rijn.

Eine Problematik bei der Anwendung der Pick-up Gleichungen stellt die Übertragbarkeit dieser Gleichungen auf den im Rahmen dieser Arbeit zu untersuchenden Fall dar. Die Herleitung der untersuchten Pick-up Gleichungen basieren auf unterschiedlichen Rahmenbedingungen. Bei der Ermittlung der Pick-up Funktion von van Rijn wurde das Sediment entlang einer ca. 30 m langen Rinne verklebt und konnte somit nicht erodieren. Etwa in der Mitte der Versuchsrinne wurde eine zylindrische Öffnung angeordnet. An dieser Stelle wurde mittels einer vertikal beweglichen Platte erodierbares Sohlmaterial in die Strömung eingebracht. Dabei wurde die konstante Steiggeschwindigkeit der Platte minimal höher als die zu erwartende Erosionsrate

gewählt. Die Platte wurde während den Versuchen kurz angehalten, wenn die Oberfläche des erodierbaren Materials die feste Sohle geringfügig überragte. Aufgrund dieser visuellen Korrektur wurden die Versuche mehrmals für jeweils 10 Minuten mit verschiedenen Personen wiederholt. Besonders bei hohen Fließgeschwindigkeiten ergab sich dadurch eine maximale Streuung von bis zu 20 %. Die Gleichung besitzt somit erstens eine gewisse Ungenauigkeit und zweitens beschreibt sie nur die Aufnahmerate für völlig klares Wasser. Dies bedeutet, dass die Konzentration der Strömung über dem Erosionssubstrat gleich Null ist. Am Luvhang des Riffels steigt die Konzentration bis zur Krone an, so dass es fraglich ist, ob die Pick-up Gleichung von van Rijn noch ihre Gültigkeit besitzt. Auch ist die Erosionsfläche bei den Versuchen von van Rijn nicht bekannt. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass der Sedimentationsprozess in die Gleichung involviert ist. Es ist denkbar, dass ein Partikel am Anfang der Platte erodiert und bereits am Ende der Platte wieder sedimentiert und damit nicht erfasst wird. Zusätzlich muss noch erwähnt werden, dass das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Sediment mit einem Durchmesser von $100\ \mu\text{m}$ kleiner ist als das kleinste Sedimentkorn ($130\ \mu\text{m}$), das van Rijn bei seinen Versuchen verwendete. Bei den Modellen von Yalin und Einstein besteht die Problematik bei der Bestimmung der Konstanten. Diese müssen mit Hilfe von Versuchen ermittelt werden. Hierfür wurden ebenfalls die Versuche von van Rijn verwendet.

8.4 Riffelwanderung

Für die Analyse der Riffelwanderung wird die Modellierung der Bewegung der Sohle mit Hilfe der G -Gleichung "angeschaltet". Da die Konzentrationsgleichung an die Sedimentationsgleichung gekoppelt ist, wird die Sedimentation bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Evolutionsfläche erst dann berücksichtigt, wenn sich im Gebiet eine bestimmte Konzentration eingestellt hat. Es ist anzumerken, dass in fluvialen Strömungen immer eine Konzentration an Partikeln besteht, die nur sehr schwer zu bestimmen ist. Die Anfangswerte der Konzentration sind daher bei den durchgeführten Berechnungen unbekannt. Riffelwanderung findet statt, wenn ein Gleichgewichtszustand zwischen Erosion und Sedimentation herrscht. Die Bewegung der Sedimentoberfläche wird erst aktiviert, wenn die mittlere Erosionsrate mit der mittleren Sedimentationsrate übereinstimmt.

Die Riffelwanderung wird, wie die Konzentrationsgleichung, mit Hilfe der drei verschiedenen Pick-up Gleichungen berechnet.

- Pick-up Gleichung von Yalin (1)
- Pick-up Gleichung von Einstein (2)
- Pick-up Gleichung von van Rijn (3)

Die Berechnungen werden mit den in Kapitel 8.2 beschriebenen Gittern durchgeführt. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v_m beträgt für die Testfälle $0,4\ \text{m/s}$ und es wird mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,002\ \text{s}$ gerechnet.

Bei allen drei Modellen ist zu beobachten, dass im Leebereich eine gleichmäßige Sedimentation stattfindet. Die Erosion am Luvhang wird in zwei Bereichen kurz nach der Mulde und vor der Krone sichtbar. Zwischen diesen Erosionsbereichen ist im Bereich des Anlegepunktes der Rezirkulationszone keine Erosion zu beobachten. Bei der Modellierung der Riffelbewegung mit der Pick-up Gleichung von van Rijn ist eine wesentlich geringere Fortbewegungsgeschwindigkeit als bei den anderen beiden Gleichungen zu beobachten. Es wird wesentlich weniger Sediment pro Zeit erodiert und folglich auch sedimentiert. Die Fortbewegungsgeschwindigkeit von ca. 24 cm/h liegt unterhalb der Fortbewegungsgeschwindigkeit, die mit den Pick-up Gleichungen von Yalin und Einstein von jeweils ca. 48 cm/h berechnet werden. Die Fortbewegungsgeschwindigkeiten liegen somit zwischen den in der Literatur beschriebenen Werten von Brooks und Dillo (Kühlborn 1993). Alle Modelle haben jedoch gemeinsam, dass der Riffel im Bereich der Krone etwas abflacht. Dies könnte daran liegen, dass "bedload" im oberen Bereich der Krone existiert und ein Rutschen von Sandpartikel über die Krone stattfindet. Dieser Vorgang kann jedoch nicht modelliert werden, da es nicht möglich ist, mit der Level Set Methode Bewegungen tangential zur Sedimentoberfläche zu beschreiben. Eine weitere Möglichkeit könnte aus einer ungenauen Abbildung der Strömungsverhältnisse im Bereich hinter der Krone resultieren. Bei der Berechnung des Strömungsfeldes wurde festgestellt, dass es hinter der Krone zu einer Scherströmung kommt und die Sandpartikel überwiegend über die Krone hinweg transportiert werden. Der Ablösepunkt dieser Scherströmung könnte auch etwas mehr stromabwärts liegen, so dass die Strömung noch über die Krone hinweg anliegt und kurz vor dem Ablösepunkt sich die Geschwindigkeit reduziert und es so zu Ablagerungen kurz hinter der Krone kommt, die hier nicht abgebildet werden. Des Weiteren muss auch die Geometrie der Krone diskutiert werden. Die Geometrie der Krone wurde aus Versuchsergebnissen übernommen. Die vorherrschenden Strömungsbedingungen können jedoch nicht exakt die in den Versuchen existierenden Strömungsverhältnisse widerspiegeln. Die Geometrie der Krone ist möglicherweise für diesen Strömungsfall nicht absolut korrekt abgebildet. Außerdem wird das Nachrutschen von Sediment bei Überschreiten des natürlichen Böschungswinkel, das in der Natur hinter der Krone beobachtet wird, nicht modelliert. An dieser Stelle ist auch zu erwähnen, dass die Veränderung der Geometrie der Krone möglicherweise auch auf das numerische Verfahren zurückführbar ist, denn Bereiche mit starken Krümmungen neigen bei der Level Set Methode aufgrund numerischer Diffusion künstlich aufzuweichen (Bürger 2008).

Im Bereich der Anlegezone findet, wie erwartet, eine Reduzierung der Fortbewegungsgeschwindigkeit statt, die zu einer Verformung der Riffelgeometrie führt. Dies liegt daran, dass in diesem Bereich die kritische Wandschubspannung nicht überschritten wird. Wie in Kapitel 8.3 bereits erwähnt, ist hier die Anwendbarkeit der kritischen Wandschubspannung aus dem Shieldsdiagramm fraglich, da im Bereich der Ablösezone große Fluktuationen der Wandschubspannung existieren und die kritische Wandschubspannung reduzieren. Diese Thematik wird im nächsten Kapitel intensiver behandelt.

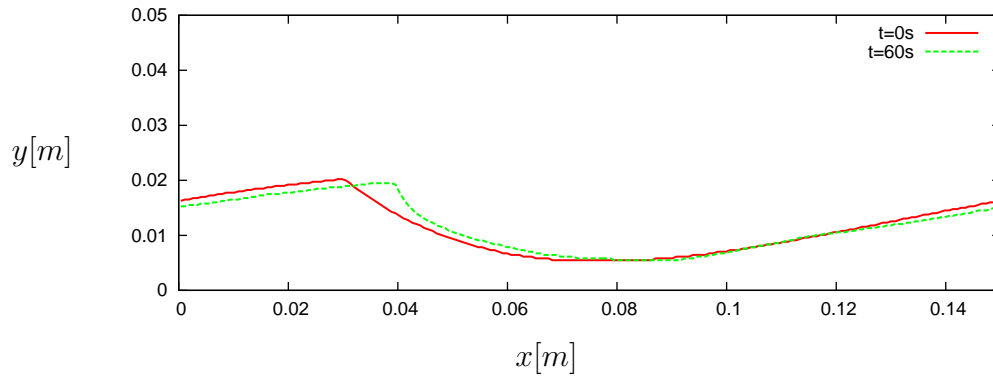


Abbildung 8.29: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ mit Yalin

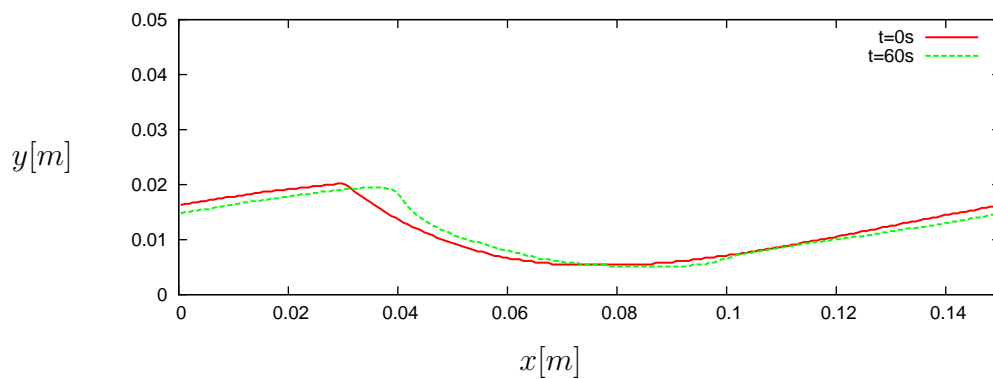


Abbildung 8.30: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ mit Einstein

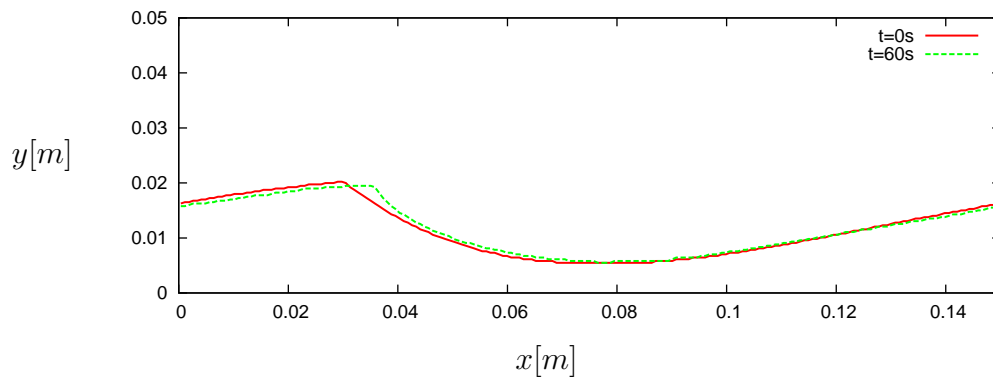


Abbildung 8.31: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ mit van Rijn

Der Fortbewegungsprozess der Mulde verhält sich bei den drei Modellen unterschiedlich. Lediglich das Modell von Einstein erhält die Form der Mulde. Bei der Verwendung der Pick-up Gleichung von Yalin wandert die Mulde ebenfalls, ändert jedoch ihre Form und verliert etwas an Länge. Die Wanderung der Mulde kann bei der Verwendung des Modells von van Rijn nicht beobachtet werden. In diesem Fall findet in der Mulde nur Sedimentation statt. Stromabwärts der Mulde findet keine Erosion statt.

Die Veränderung der Geometrie ist möglicherweise auch auf einen noch nicht erreichten Gleichgewichtszustand zurückzuführen. Kühlborn (Kühlborn 1993) konnte bei seinen Versuchen erkennen, dass sich je nach Strömungsintensität ein Gleichgewichtszustand nach 1 bis 7,5 Stunden einstellt. Die LES Rechnungen werden sehr hoch aufgelöst durchgeführt. Die Simulationsdauer ist, bedingt durch die feine räumliche und zeitliche Auflösung, sehr hoch. Ob bei den durchgeführten Berechnungen tatsächlich ein Gleichgewichtszustand erreicht wurde, lässt sich schwer abschätzen und kann nur mittels längerfristiger Simulationen überprüft werden, die im Zeitrahmen dieser Arbeit nicht durchführbar waren.

8.5 Beschreibung der Erosion mit Fluktuationsgrößen

Wie bereits in Kapitel 2 dargestellt, existiert ein Ansatz von Zanke (Zanke 2001), bei dem die kritische Wandschubspannung aus dem inneren Reibungswinkel des Sediments und den turbulenten Wandschubspannungen bestimmt werden kann (siehe Gleichung 2.6). Für die Berechnung der kritischen Wandschubspannung wird anstatt des inneren Reibungswinkels der Lagewinkel ϕ' eingeführt. Für den Bewegungsbeginn besitzen die leichter beweglichen Anteile mit $\phi' = 20$ einen relevanten Prozentsatz. Mit Hilfe der LES Rechnung ist es möglich, die turbulenten Wandschubspannungen und die daraus resultierenden kritischen Wandschubspannungen zu berechnen.

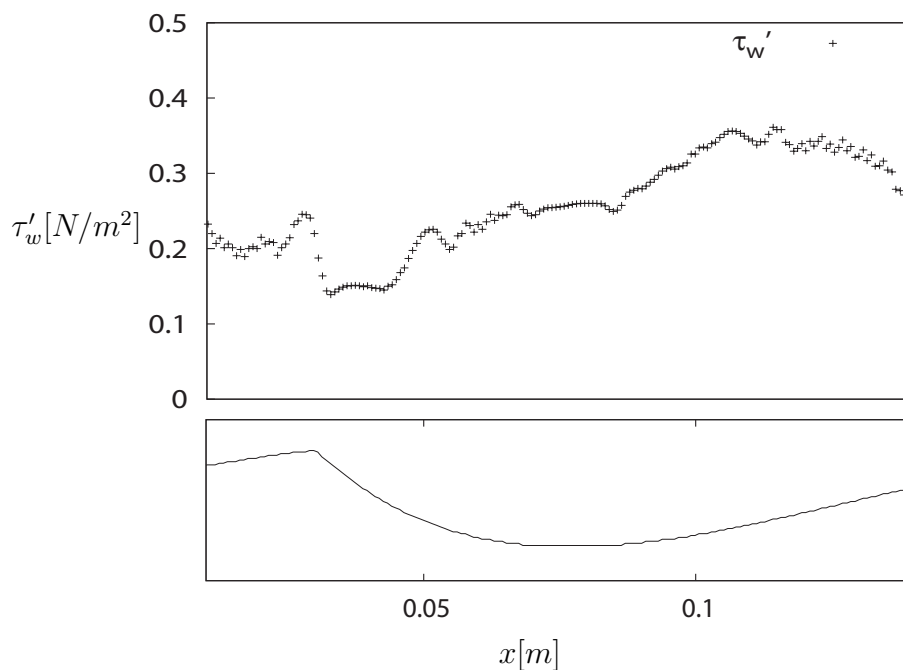


Abbildung 8.32: Fluktuationen der Wandschubspannung entlang des Riffels bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$

Abbildung 8.32 zeigt die turbulenten Wandschubspannungen entlang des Riffels. Hierbei ist zu erkennen, dass die Fluktuation im Bereich der Wiederanlagezone besonders hoch ist und im Bereich des Leehangs sehr niedrig.

Die daraus resultierende kritische Wandschubspannung kann Abbildung 8.33 entnommen werden. Bei der Modellierung der Riffelbewegung mit dem Ansatz von Zanke wird im Bereich des Anlegepunktes der Rezirkulationszone aufgrund hoher turbulenter Schwankungen und den daraus resultierenden niedrigen kritischen Wandschubspannungen Sediment erodiert.

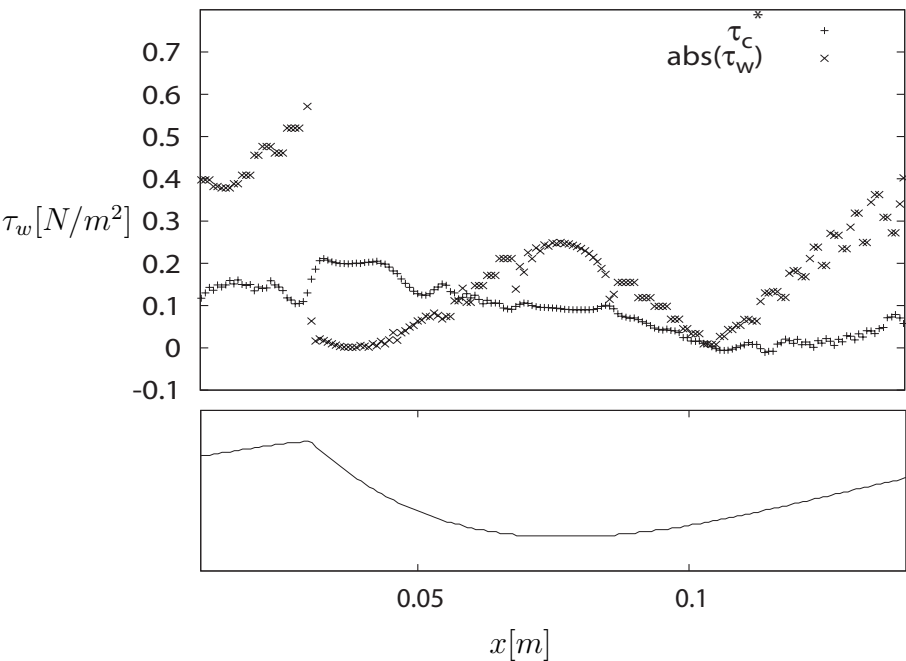


Abbildung 8.33: Kritische Wandschubspannung entlang des Riffels ($v_m = 0,4\text{ m/s}$)

Abbildung 8.34 stellt schematisch dar, in welchen Bereichen beim Ansatz von Zanke verglichen zur Verwendung des Shieldsdiagramms, zusätzlich Erosion stattfindet.

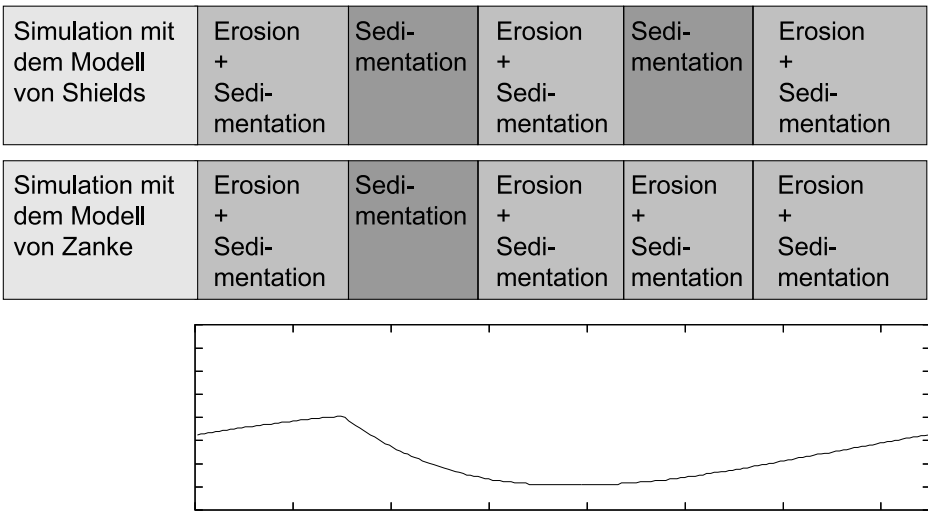


Abbildung 8.34: Erosions- und Sedimentationszonen entlang des Riffels

Die Originalgleichung von van Rijn (siehe Gleichung 2.9) kann beim Ansatz von Zanke nicht verwendet werden. Die kritische Wandschubspannung τ_c kann beim Ansatz von Zanke den Wert Null annehmen, so dass der Nenner in der Formel von van Rijn zu Null wird. Aus diesem Grund wird für die Anwendung der Gleichung die kritische Wandschubspannung im Zähler mit dem Ansatz von Zanke berechnet und im Nenner wird weiterhin die kritische Wandschubspannung nach Shields für das entsprechende Sediment verwendet.

Die Gleichung von Yalin (siehe Gleichung 2.12) steht nicht in Bezug zur kritischen Wandschubspannung. Dies wird beim Ansatz von Zanke zum Problem, da die kritische Wandschubspannung einen wesentlichen Bestandteil in der Gleichung von Zanke besitzt. Die Wandschubspannung in Yalins Gleichung wird analog zum Ansatz von van Rijn durch die Differenz aus der Wandschubspannung und der kritischen Wandschubspannung nach Zanke ersetzt. Die daraus resultierende Funktionsgleichung wird mit einem Faktor β an die Versuchsergebnisse von van Rijn angepasst. Die modifizierte Pick-up Gleichung von Yalin lautet

$$E = \alpha \rho_s \left(\frac{\beta(\tau_w - \tau_{c,Zanke})}{\rho} \right)^{0,5}, \quad (8.5)$$

wobei β zu 2 gewählt wird.

Abbildung 8.35 kann der Verlauf der Gleichung 8.5 im Vergleich zu den anderen Pick-up Gleichungen entnommen werden. Hierbei wird zum Vergleich bei allen Gleichungen die kritische Wandschubspannung aus dem Shieldsdiagramm verwendet. Dabei ist zu erkennen, dass bereits bei ca. $3 * \tau_c$ die Erosionsrate der Gleichungen von Yalin, von Yalin modifiziert und von Einstein sehr nah zusammenliegen. Nur die Erosionsrate von van Rijn erlangt erst bei $7 * \tau_c$ ungefähr den Betrag der anderen Gleichungen.

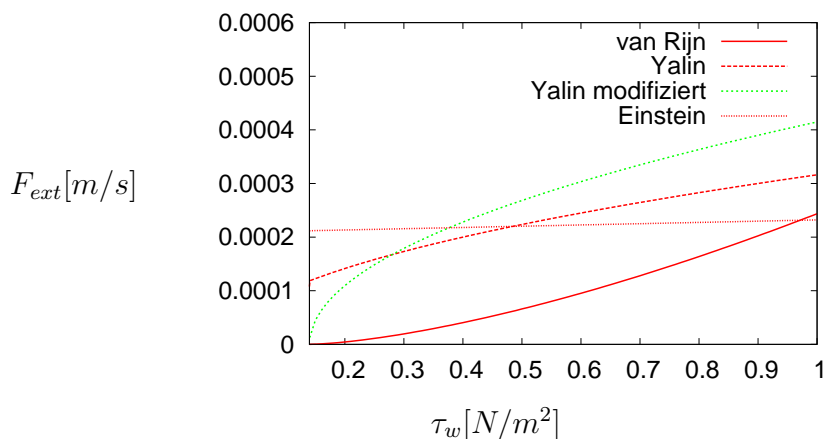


Abbildung 8.35: Erosionsraten der verschiedenen Pick-up Gleichungen

Abbildung 8.36 stellt die Konzentrationsverteilung im Gebiet, nach Implementierung des Ansatzes von Zanke und der modifizierten Pick-up Gleichungen von Yalin in FASTEST-3D, dar.

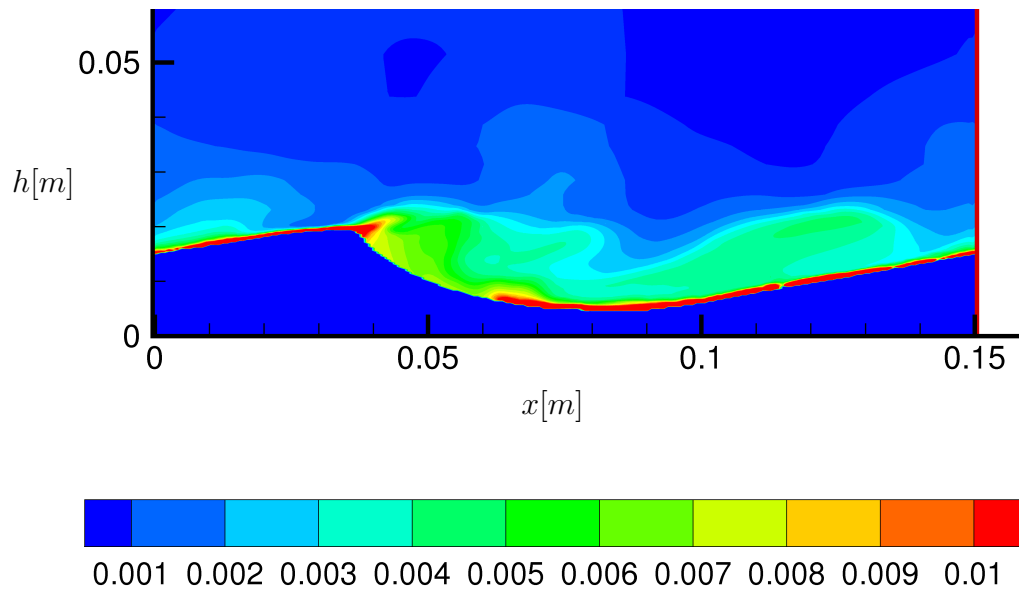


Abbildung 8.36: Darstellung der Konzentrationsverteilung entlang des Riffels bei $t = 25s$

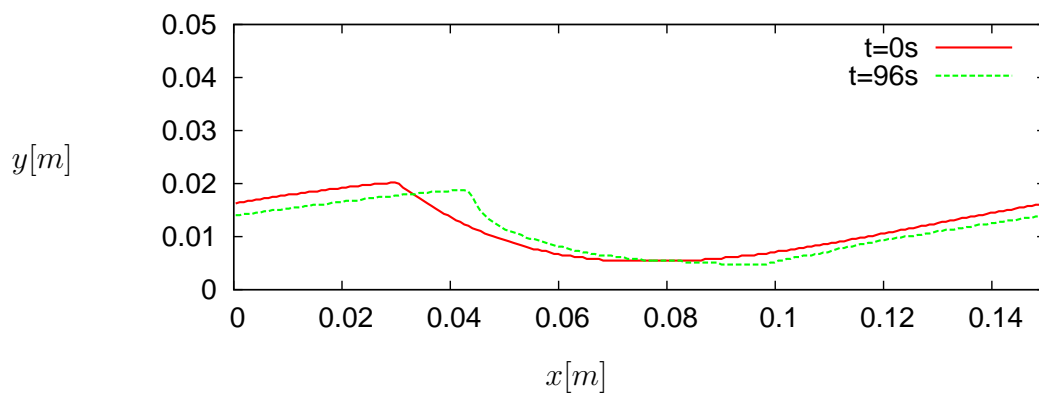


Abbildung 8.37: Riffelwanderung bei $v_m = 0,4 m/s$ mit dem Modell von Yalin modifiziert

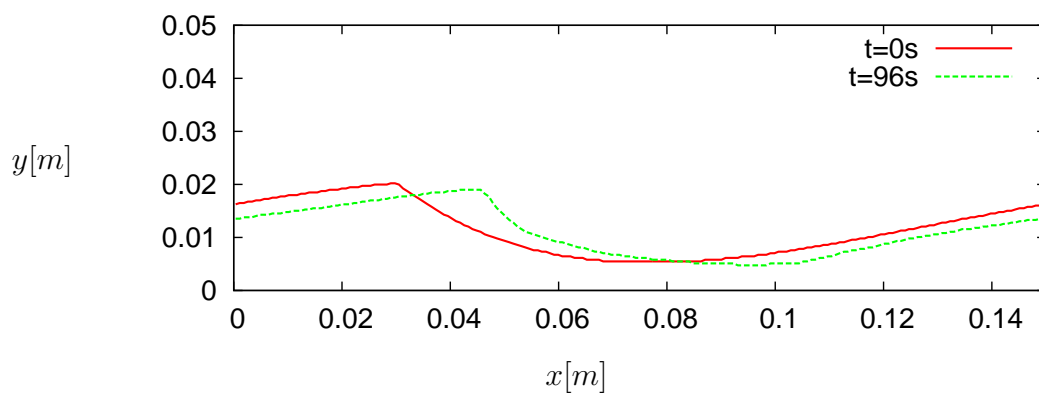


Abbildung 8.38: Riffelwanderung bei $v_m = 0,4 m/s$ mit dem Modell von Einstein

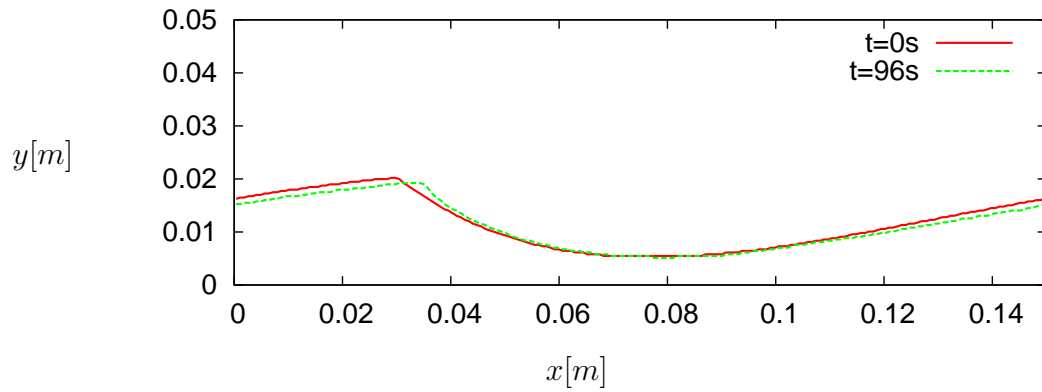


Abbildung 8.39: Riffelwanderung bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ mit dem Modell von van Rijn modifiziert

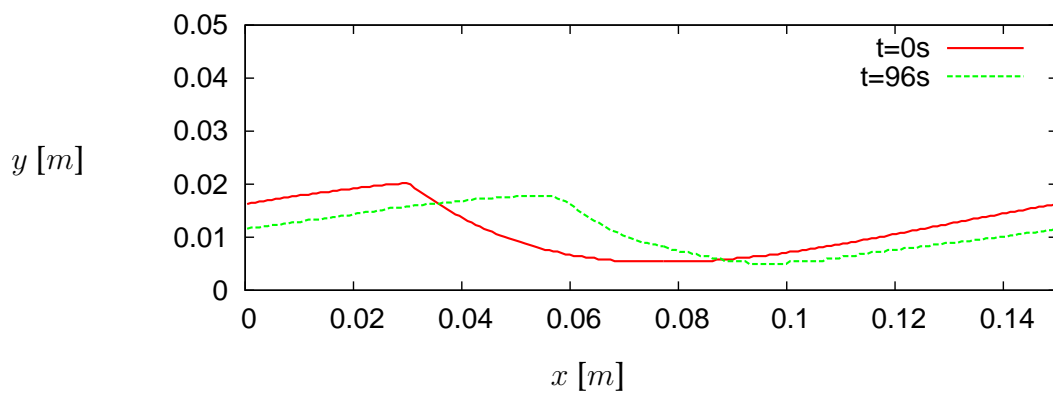


Abbildung 8.40: Riffelwanderung bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell von Yalin modifiziert

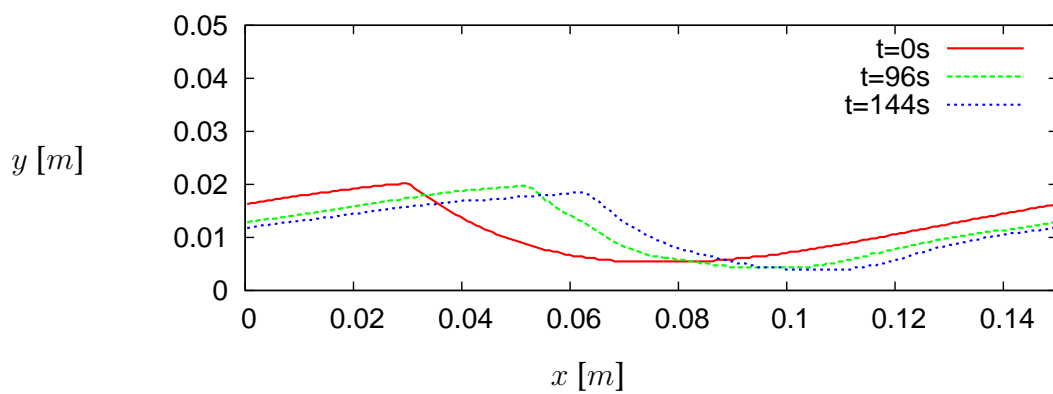


Abbildung 8.41: Riffelwanderung bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell von Einstein

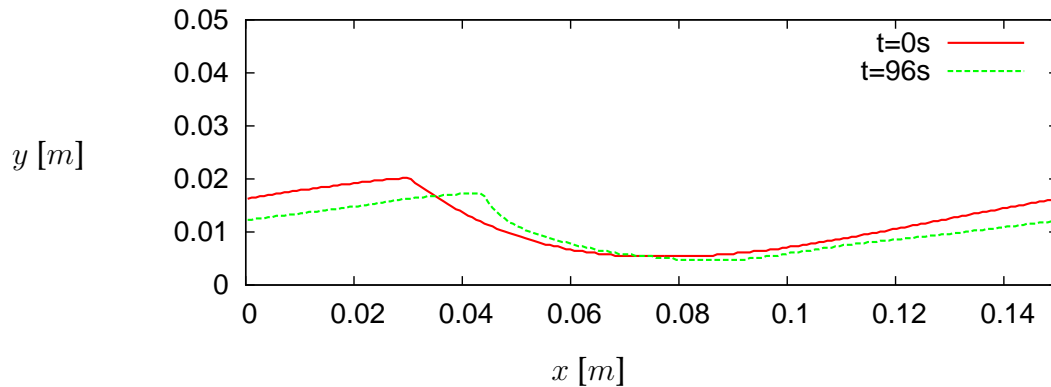


Abbildung 8.42: Riffelwanderung bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell von van Rijn modifiziert

Vergleicht man die Riffelwanderungen, die aus den verschiedenen Pick-up Gleichungen bei der mittleren Strömungsgeschwindigkeit von $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ resultieren, erkennt man in abgemilderter Form die Beobachtungen des vorigen Kapitels. Die Krone verändert ihre Kontur und der Luvhang flacht ab. Der Unterschied zwischen der Anwendung des Modells von Zanke zur Bestimmung der kritischen Wandschubspannung und dem Ansatz mit dem kritischen Shieldsparameter wird im Bereich der Anlegezone erkennbar. Aufgrund der hohen turbulenten Fluktuationen wird auch in diesem Bereich Sediment erodiert. Jedoch ist auch hier eine minimale Auflandung zu verzeichnen. Wie bei den vorherigen Testfällen ist die geringere Wanderungsgeschwindigkeit bei der Verwendung der Pick-up Gleichung von van Rijn deutlich erkennbar. Das Modell von Einstein liefert bei diesem Testfall die plausibelsten Ergebnisse. Wird die Strömungsgeschwindigkeit erhöht, ist ein exponentieller Anstieg der Wanderungsgeschwindigkeit ersichtlich. Die Abflachung des Luvhanges nimmt besonders bei der Anwendung des Modells von Einstein ab. Ein wesentlicher Unterschied der Pick-up Gleichung von Einstein zu den anderen Gleichungen ist die Annahme, dass sich die Erosionsrate bei Erreichen einer bestimmten Konzentration in Bodennähe nicht mehr ändert. Bei Feinsand ist dieser Zustand durch die geringe kritische Wandschubspannung sehr schnell erreicht. Diese Annahme ist nur im Ansatz von Einstein enthalten und scheint für die Simulation der Riffelwanderung wesentlich zu sein.

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Modellierung der Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit mit Ergebnissen der Versuche von Brooks und von Dillo (Kühlborn 1993) verglichen. Hierbei ist zu erkennen, dass bei den Modellen von Yalin modifiziert und von Einstein der empirische Zusammenhang zwischen der Riffelwanderungsgeschwindigkeit und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit über den funktionalen Zusammenhang $v_r = A \cdot v_m^{4,1}$ bestimmt werden kann (siehe Abbildung 8.43). In Abbildung 8.43 ist des Weiteren ersichtlich, dass die Steigung der Geraden sehr gut mit den Ergebnissen von Brooks übereinstimmt. Jedoch ist die Gerade leicht nach rechts verschoben. Dies bedeutet, dass die Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit etwas niedriger liegt als von Brooks beobachtet. Dies könnte bedeuten, dass die vorgegebene Rif-

felgeometrie noch keinen stationären Zustand erreicht hat und Energie zur Riffelgeometrieumformung benötigt wird. Dies führt zu einer Verminderung der Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit. Die Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit liegt jedoch über den von Dillo beobachteten Werten. Die mit dem Modell von van Rijn erzielten Ergebnisse stimmen mit $v_r = 0,003 \text{ cm/s}$ bei $v_m = 0,4 \text{ m/s}$ und mit $v_r = 0,01 \text{ cm/s}$ bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ sehr gut mit den beobachteten Werten von Dillo überein. Die Steigung deckt sich ebenfalls mit den experimentellen Ergebnissen.

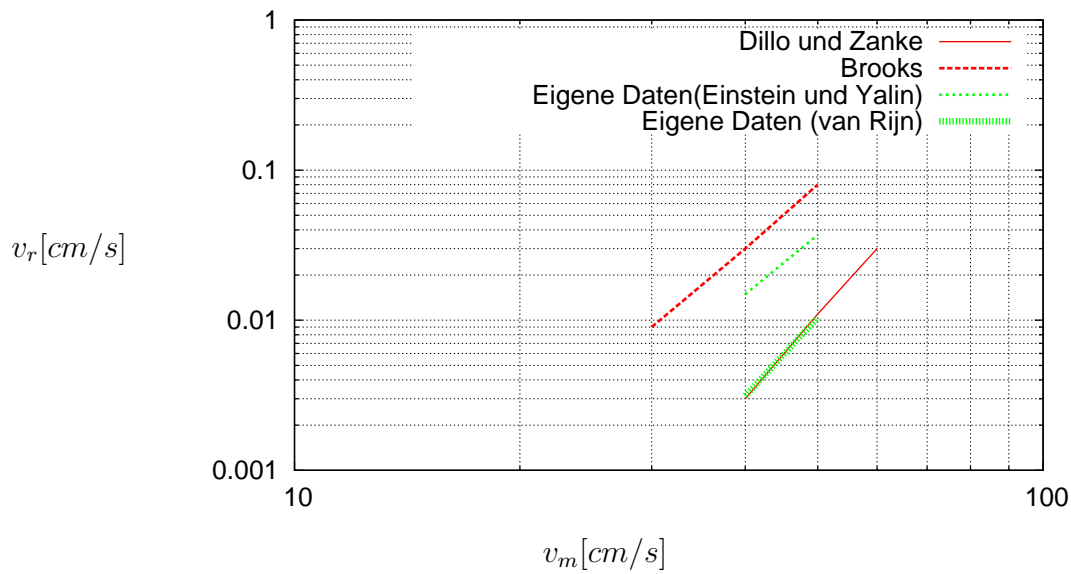


Abbildung 8.43: Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit

8.6 Bildung der Riffelstruktur

Im Folgenden wird eine Störung in Form einer Sinuswelle als Bodenform vorgegeben und die sich daraus entwickelnde Riffelstruktur analysiert. Für die Testfallserie wird die Riffelentstehung anhand der bereits bekannten Pick-up Gleichungen untersucht.

- Pick-up Gleichung von Yalin modifiziert (1)
- Pick-up Gleichung von Einstein (2)
- Pick-up Gleichung von van Rijn modifiziert (3)

Es wird die in Kapitel 8.1 beschriebene Sinuskurve als Bodenwelle vorgegeben, jedoch mit einer Amplitude von $0,75 \text{ cm}$. In der Literatur wird bei einem Sand mit einem Korndurchmesser von ca. $0,1 \text{ mm}$ eine Riffelhöhe von ca. $1,5 \text{ cm}$ und eine Riffellänge von 15 cm beschrieben. Es wird mit einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit von $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ gerechnet.

Bei allen Rechnungen setzt eine Erosion an der Luvseite ein und die Krone wandert in Strömungsrichtung. Es entsteht ein Längenverhältnis Luv zu Lee von $1/2$ zu etwa

2/3 (siehe Abbildung 8.44). Es kann beobachtet werden, dass nach einer bestimmten Zeit bei allen drei Testfällen eine Riffelendkontur erreicht wird und die Riffelwanderung einsetzt (siehe Abbildung 8.45). Die Abbildungen 8.44 und 8.45 wurden mit dem modifizierten Ansatz von Yalin gerechnet und stehen exemplarisch für die Ergebnisse aller drei Testfälle.

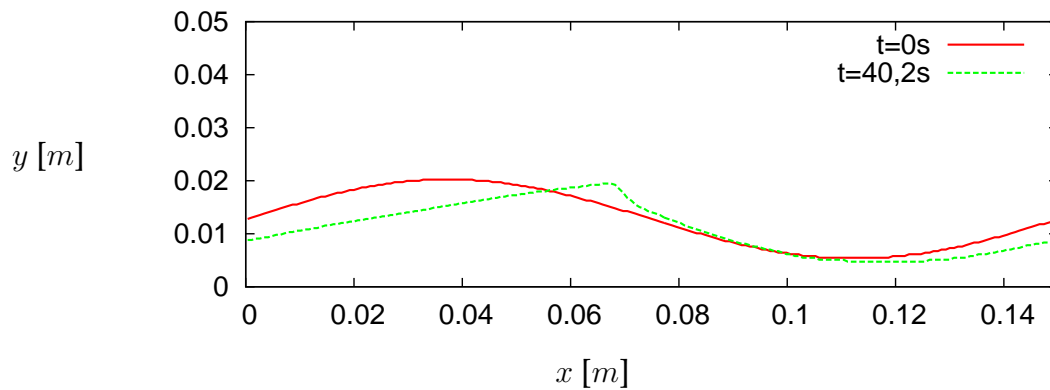


Abbildung 8.44: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem modifizierten Modell von Yalin vor Erreichen des "Endzustands"

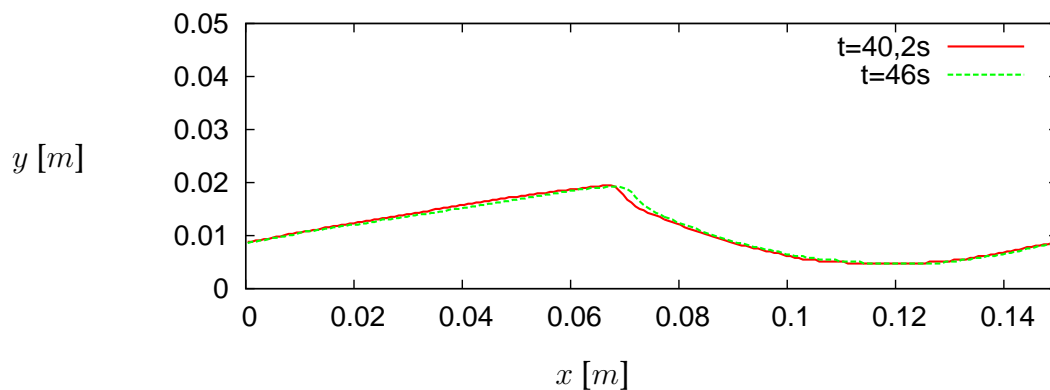


Abbildung 8.45: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem modifizierten Modell von Yalin nach Erreichen des "Endzustands"

Vergleicht man die entstehenden Strukturen mit einer aus Versuchen ermittelten Riffelkontur (Haslinger 1993), kann eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden (siehe Abbildung 8.46, 8.47, 8.48). Der modifizierte Ansatz von van Rijn zeigt eine erhöhte Erosion sowohl am Luvhang als auch im Bereich der Krone. Dies führt zu einer geringeren Riffelhöhe.

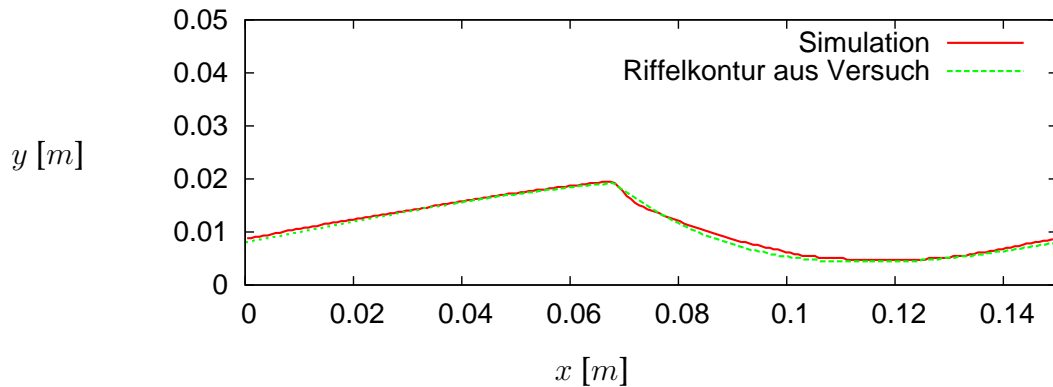


Abbildung 8.46: Vergleich der Riffelkontur bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem modifizierten Modell von Yalin mit Messdaten von Haslinger (Haslinger 1993)

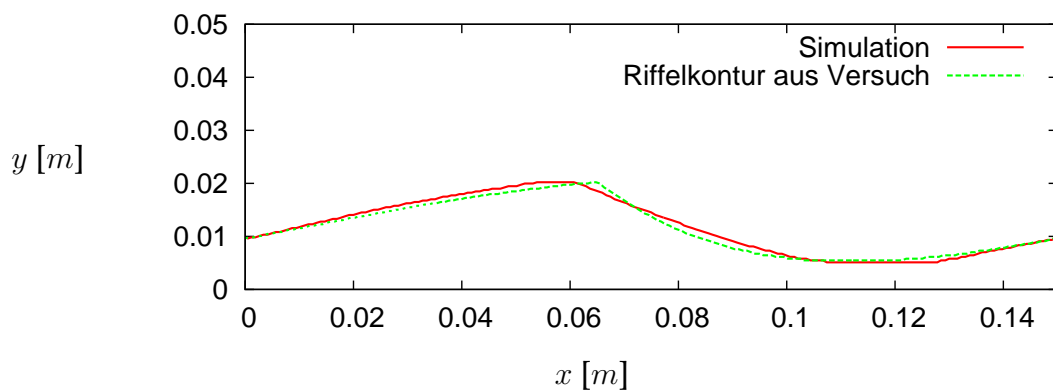


Abbildung 8.47: Vergleich der Riffelkontur bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell von Einstein mit Messdaten von Haslinger (Haslinger 1993)

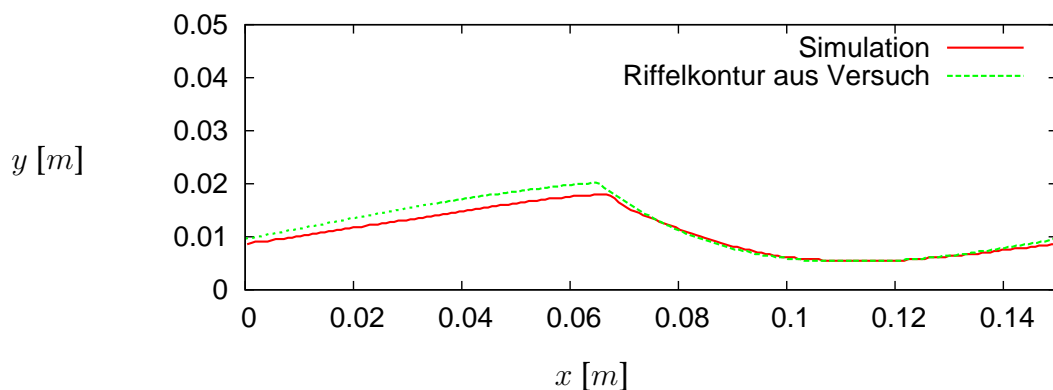


Abbildung 8.48: Vergleich der Riffelkontur bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem modifizierten Modell von van Rijn mit Messdaten von Haslinger (Haslinger 1993)

Betrachtet man für diesen "Endzustand" die Wandschubspannungen (siehe Abbildung 8.49), erkennt man, dass die Rücklaufwalze bis ca. $1/3$ des Luvhanges reicht.

Auch dies wird durch die in der Literatur beschriebenen Versuchsergebnisse bestätigt. Der Luvhang des Riffels verlängert sich und die Wandschubspannung entlang des Luvhangs nimmt ab. Durch die Verschiebung der Krone verändert sich das Verhältnis der Wandschubspannung von Luv zu Lee von $\tau_{w,Luv}/\tau_{w,Lee} = 18$ auf $\tau_{w,Luv}/\tau_{w,Lee} = 4$.

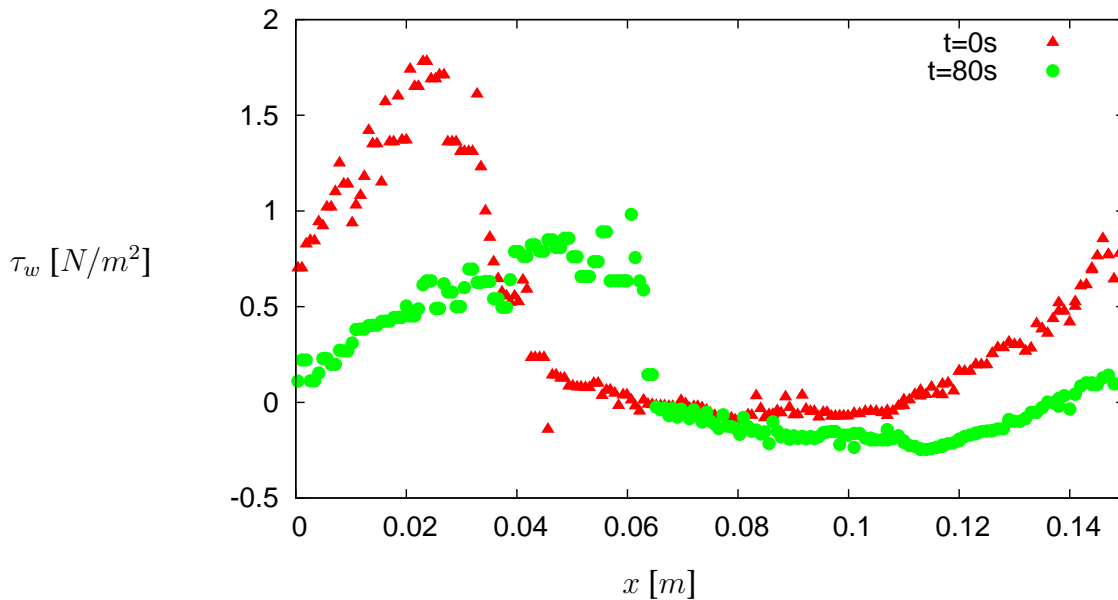


Abbildung 8.49: Zeitliche Entwicklung der Wandschubspannung entlang des Riffels bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$

Des Weiteren wird eine fast ebene Sohloberfläche vorgegeben, um, ausgehend von einer minimalen Störung, die Entstehung einer Riffelkontur zu untersuchen. Es wird wieder die in Kapitel 8.1 beschriebene Sinuskurve, jedoch mit einer kleineren Amplitude von $0,15 \text{ cm}$, als Bodenwelle vorgegeben.

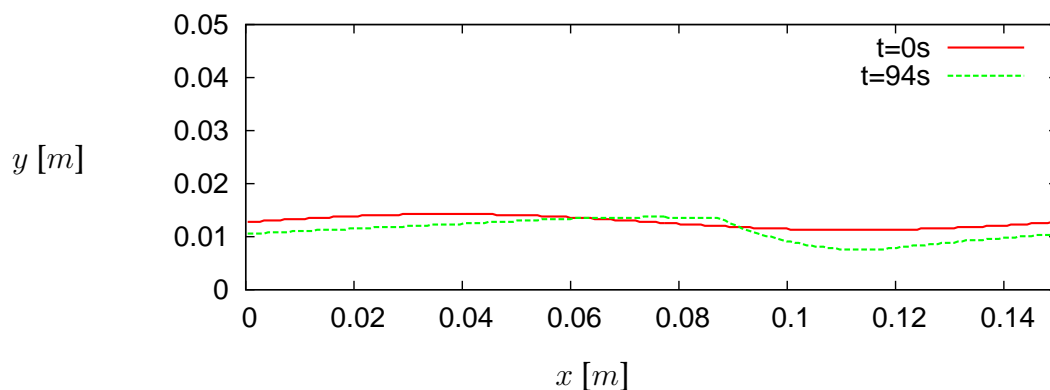


Abbildung 8.50: Zeitliche Entwicklung des Riffels bei $v_m = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell von Einstein

Anhand Abbildung 8.50 ist erkennbar, dass sich eine Riffelkontur aus der fast ebenen Sohle entwickelt. Bereits nach 94 s haben sich typische Riffelmerkmale ausgebildet.

Die Krone, die Mulde sowie die Charakteristiken des Lee- und Luvhangs werden deutlich. Allerdings besitzt die Riffelhöhe bis zu diesem Zeitpunkt nur einen Wert von 0.06 m und das Verhältnis Lee- zu Luvhang liegt bei 1 zu 5. Es ist jedoch anzumerken, dass der Endzustand noch nicht erreicht ist. Es wird erwartet, dass die Riffelmulde sich weiter eintieft und der Tiefpunkt stromabwärts wandert. In Laborversuchen ((Kühlborn 1993)) wurden bis zu $7,5\text{ h}$ benötigt bis sich aus einer ebenen Sohle eine im Gleichgewichtszustand befindliche Riffelkontur entwickelt hat. Eine Modellierung dieses Zeitraums mittels einer LES konnte im Zeitrahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden.

Man kann davon ausgehen, dass sich ein Riffel in der Form so lange verändert bis sich für die bestimmten Strömungsverhältnisse ein bestimmtes Verhältnis von τ_{Luv} zu τ_{Lee} einstellt. Mit diesen Erkenntnissen kann man die Beobachtungen von Yalin und Kühlborn erklären. Wenn am Anfang durch stochastische Prozesse, z.B. durch Turbulenz, kleine Riffel entstehen, ist das Verhältnis der Wandschubspannung im Lee zu Luvhang erhöht. Es setzt somit eine Erosion im Leebereich ein und die Riffelmulde vertieft sich (siehe Abbildung 8.50). Wird die Strömungsgeschwindigkeit erhöht, vertieft sich die Riffelmulde weiter. In einem Bereich von $3 < \tau_c/\tau_{wand} < 10$ verändert sich die Riffelform kaum und der Riffel reagiert mit einer erhöhten Riffelfortbewegungsgeschwindigkeit. Dies liegt daran, dass aufgrund der erhöhten Wandschubspannung eine erhöhte Erosionsrate und folglich eine größere Sedimentationsrate vorliegt. Das Verhältnis von τ_{Luv} zu τ_{Lee} ändert sich kaum. Wird die Strömungsgeschwindigkeit jedoch weiter gesteigert, erhöht sich auch das Verhältnis τ_{Luv} zu τ_{Lee} , so dass der Luvhang beginnt abzuflachen und sich die Riffelhöhe reduziert. Es ist zu erwarten, dass bei einer weiteren Erhöhung der Reynoldszahl der Riffel immer mehr abflacht bis die Riffelstruktur vollständig verschwindet und sich wieder eine ebene Sohle ausbildet. Leider konnten im Rahmen dieser Arbeit aufgrund der hohen Rechenzeiten keine Rechnungen im Bereich $\tau_c/\tau_{wand} > 10$ vorgenommen werden und das Phänomen der Abflachung der Riffelhöhe mit steigender Reynoldszahl nicht untersucht werden.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Level Set Methode verwendet, um die Konturänderung einer turbulent überströmten Sedimentoberfläche zu beschreiben. Die dazu benötigte Geschwindigkeit normal zur Sedimentoberfläche, die den physikalischen Prozess des Abtragens und Anlagerns von Sediment beschreibt, sowie die benötigten Randbedingungen an der Sedimentoberfläche, wurden in das Program FASTEST-3D implementiert. Zusätzlich wurde die Sinkgeschwindigkeit in die Konzentrationsgleichung implementiert, um die Bewegung des Sediments in Suspension zu beschreiben und folglich die Sedimentationsrate berechnen zu können. Ziel war es, den Prozess der Riffelwanderung abzubilden. Dabei wurden Testrechnungen mit unterschiedlichen Ansätzen zur Bestimmung der kritischen Wandschubspannung, sowie drei verschiedener Pick-up Gleichungen bei verschiedenen Reynoldszahlen durchgeführt.

Zunächst wurde anhand einer Strömung über eine fixierte, sinuswellenförmige Sohle mit einem konturangepassten Gitter der Einfluss der Gitterauflösung untersucht. Dabei konnte herausgestellt werden, dass bereits kleine Änderungen der Auflösung im wandnahen Bereich zu Veränderungen der Momente zweiter Ordnung führen, obwohl die Wandschubspannungen und Geschwindigkeitsprofile nahezu identisch sind. Liegt der erste Gitterpunkt außerhalb der viskosen Unterschicht, werden auch die Geschwindigkeitsprofile und die Wandschubspannungen unzureichend wiedergegeben.

Danach wurde die Implementierung der Wandrandbedingung an der $G = 0$ Grenzfläche mit der konturangepassten Rechnung verglichen. Dazu wurde ein orthogonales Gitter mit der gleichen Sohlenkontur, die mit Hilfe der Level Set Methode abgebildet wird, verwendet. Dabei zeigte sich, dass es bei diesem Testfall nicht möglich ist mit einer moderaten Anzahl von Kontrollvolumina sicherzustellen, dass immer mehrere Gitterpunkte in der viskosen Unterschicht liegen. Die Unterschiede zwischen der konturangepassten Rechnung und der Level Set Rechnung werden vor allem bei den Reynoldsspannungen sichtbar. Die Geschwindigkeitsprofile und die Wandschubspannungen, die wesentliche Größe für die Erosions- und Sedimentationsvorgänge, zeigen gute Übereinstimmungen.

Anschließend wurden die Geschwindigkeitsprofile über einer Riffelkontur untersucht. Es wurde festgestellt, dass eine Erhöhung bzw. Reduzierung der Reynoldszahl zu einer Veränderung der Amplitude der Wandschubspannungen führt, jedoch nicht zu einer Lageveränderung des Anlegepunktes der Rezirkulationszone. Eine Reduzierung oder Erhöhung der Riffelhöhe führt hingegen zu einer Verlagerung der Anlegezone der Rezirkulationszone, aber nicht zu einer Veränderung der Amplitude der Wandschubspannung. Die Betrachtung der momentanen Geschwindigkeitsfelder

verdeutlicht die Instationarität der Strömung. Meist befinden sich zwei oder drei Rezirkulationszonen hinter der Krone des Riffels, die im Mittel eine Rezirkulationszone bilden.

Danach wurde die Ausbreitung des Sediments in Suspension untersucht. Dabei ist erkennbar, dass sich dreidimensionale Strukturen hinter der Krone, sogenannte "Finger" ausbilden. Diese Strukturen konnten ebenfalls bei Zedler und Street (Zedler & Street 2001) beobachtet werden. Diese ersten Testrechnungen verwendeten zur Bestimmung der kritischen Wandschubspannung den Ansatz von Shields. Dabei konnte gezeigt werden, dass dieser Ansatz im Bereich der Anlegezone der Rezirkulationszone zu unbefriedigenden Ergebnissen führt. Dies konnte auch anhand nachfolgender Testrechnungen, bei denen die Riffelwanderung einsetzt und es zu einer Auflandung im Bereich der Anlegezone kommt, bestätigt werden.

Daraufhin wurde für die Bestimmung der kritischen Wandschubspannung das Verfahren von Zanke getestet. Hierbei wird die kritische Wandschubspannung mittels des natürlichen Böschungswinkels und der turbulenten Fluktuationen bestimmt. Mit diesem Verfahren konnten wesentlich bessere Ergebnisse erzielt werden. Es wurden drei verschiedene Pick-up Gleichungen und zwei verschiedenen Reynoldszahlen untersucht. Bei den Berechnungen konnten die Beobachtungen aus den Versuchen von Kühlborn, dass eine Erhöhung der Reynoldszahl zu einer Erhöhung der Wanderungsgeschwindigkeit und nicht zu einer Konturänderung führt, bestätigt werden. Beim Vergleich der drei verschiedenen Pick-up Gleichungen liefert die Gleichung von Einstein unter den vorgegebenen Rahmenbedingungen die besten Ergebnisse.

Zum Abschluss der Arbeit wurde auch die Entstehung einer Riffelkontur untersucht. Hierbei wurde eine Störung in Form einer Sinuswelle vorgegeben. Die Sohlenkontur antwortet hierauf mit einer Veränderung der Sinuswelle in eine Riffelkontur. Die Geometrie des Riffels deckt sich mit der aus Versuchen ermittelten Riffelkontur. Erst nach Erreichen dieser Kontur beginnt der Riffel zu wandern.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es in dieser Arbeit gelungen ist, mit der implementierten Level Set Methode die Riffelwanderung abzubilden. Es kommt jedoch besonders im Bereich der Krone und der Anlegezone zu einer kleinen Geometrieänderung der Riffelkontur. Allerdings kann nicht beurteilt werden, ob dies daran liegt, dass unter Umständen noch kein Gleichgewichtszustand erreicht wurde. Dabei muss auch bedacht werden, dass eine ausgebildete Riffelkontur immer dreidimensional ist und im Rahmen dieser Arbeit vereinfacht als zweidimensional angenommen wurde. Hier wäre es interessant, die bestehende Methode auf einen dreidimensionalen Fall auszudehnen. Des weiteren wären zusätzlich längerfristige Simulationen für eine sichere Beurteilung, ob der Gleichgewichtszustand bereits erreicht wurde, nötig.

Eine Herausforderung bei der Beschreibung der Bewegung einer Sedimentoberfläche mit Hilfe der Level Set Methode stellt die hohe Rechenzeit dar. FASTEST-3D ist ein blockstrukturierter Code und für die Simulationen mit der Level Set Methode wird ein orthogonales Gitter verwendet. Die Riffelkontur ist jedoch gekrümmt und ändert sich zeitlich. Daher muss ein sehr großer Bereich sehr fein aufgelöst werden, damit sichergestellt ist, dass der Wandbereich immer fein genug aufgelöst ist. Eine Verbesse-

rung kann erreicht werden, wenn die Methode mit einem Verfahren gekoppelt wird, mit dem es möglich ist, das Gitter in der Nähe der Grenzfläche mit Hilfe eines geeigneten Algorithmus lokal adaptiv zu verfeinern.

Außerdem ist es von großem Interesse, das verwendete Verfahren auf RANS Rechnungen auszudehnen und zu testen, denn die Modellierung der Verformung alluvialen Materials ist besonders im Küstenwesen und Flussbau von großem Interesse und hier handelt es sich um große, ausgedehnte Bereiche, bei denen es in den nächsten Jahren nicht möglich sein wird, Grobstruktursimulationen durchzuführen.

10 Literaturverzeichnis

- ADALSTEINSSON, D., SETHIAN, J. A. (1999): The fast construction of extension velocities in Level Set Methods. *Journal of Computational Physics* 148, 2–22.
- ALEXANDER, L. (1980): *On the geometry of ripples generated by unidirectional open channel flow*. Master thesis, Queen's University Kingston, Ontario, Canada.
- ALLEN, J. R. L. (1968): *Current ripples*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- ASLAM, T., BZDIL, J., STEWART, D. (1996): Level set methods applied to modelling detonation shock dynamics. *Journal of Computational Physics* 126, 390–409.
- BAAS, J. H. (1994): A flume study on the development and equilibrium morphology of current ripples in very fine sand. *Sedimentology* 41, 185–209.
- BENNETT, S. J., BEST, J. L. (1995): Mean flow and turbulence structure over fixed, two dimensional dunes: Implication for sediment transport and bedform stability. *Sedimentology, Oxford, U.K.* 42, 491–513.
- BREUER, M. (2001): *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Habilitation, Fachgebiet Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen Nürnberg.
- BREUSERS, H. N. C., RAUDKIVI, A. J. (1991): *IAHR Hydraulic Structures Design Manual 2 Scouring, Hydraulic Design Consideration*. A. A. Balkema/Rotterdam/Brookfield.
- BÜRGER, M. (2008): *Eine adaptive Hamilton-Jacobi Level-Set-Reinitialisierung für Zweiphasenströmungen*. Diplomarbeit am Institut für Numerische Simulation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.
- CALHOUN, R. J., STREET, R. L. (2001): Turbulent flow over wavy surface: neutral case. *Journal of Geophysical Research* 106, 9277–9293.
- CHANG, Y. S., SCOTTI, A. (2003): Entrainment and suspension of sediment into a turbulent flow over ripples. *Journal of Turbulence* 4, 1–22.
- CHANG, Y. S., SCOTTI, A. (2004): Modeling unsteady turbulent flows over ripples: Reynolds-averaged Navier-Stokes equations (RANS) versus large-eddy simulation (LES). *Journal of Geophysical Research* 109.
- CHEN, Q., DAI, G., LIU, H. (2002): Volume of Fluid Model for Turbulence Numerical Simulation of Stepped Spillway Overflow. *Journal of Hydraulic Engineering* 128, 7, 683–688.

- CHEN, S., MERRIMAN, B., OSHER, S., SMEREKA, P. (1997): A simple level set method for solving Stefan problems. *Journal of Computational Physics* 135, 8–29.
- DIN1054 (01.03): *Baugrund - Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau*. Deutsches Institut für Normung e.V.
- DREHER, T. (2005): *Selektive Sedimentation von Feinstschwebstoffen in Wechselwirkung mit wandnahen turbulenten Strömungsbedingungen*. Dissertation, Institut für Wasserbau, Lehrstuhl für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Fakultät Bauingenieur- und Umweltingenieuriwissenschaften.
- DUC, B., WENKA, T., RODI, W. (2004): Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels. *Journal of Hydraulic Engineering* 130, 9, 894–904.
- DUESING, M. (2003): *Large-eddy simulation of turbulent premixed flames*. TU Darmstadt, Ph. D. thesis.
- DYER, K. R. (1980): Velocity profiles over a rippled bed and the threshold of movement of sand. *Estuarine and Coastal Marine Science* 10, 181–199.
- EIDSON, T. M. (1985): Numerical simulation of the turbulent Rayleigh-Benard problem using subgrid model. *Journal of Fluid Mechanics* 158, 245–268.
- EINSTEIN, H. (1950): The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flow. *United States Department of Agriculture, Washington D.C., Technical Bulletin No. 1026, Sept., 25*.
- ENGELUND, J., F.;FREDSOE (1982): Sediment ripples and dunes. *Annual Review of Fluid Mechanics* , 14, 13–37.
- FASTEST (2001): *User's Manual - FASTEST3D*. Ivent Computing GmbH.
- FEDKIW, R. P. (2002): Coupling an Eulerian fluid calculation to a Lagrangian solid calculation with the ghost fluid method. *Journal of Computational Physics* 161, 30–60.
- FEDKIW, R. P., ASLAM, T., MERRIMAN, B., OSHER, S. (1999): A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *Journal of Computational Physics* 175, 200–224.
- FERZIGER, J., PERIC, M. (1996): *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- FÜRBÖTER, A. (1983): Zur Bildung von makroskopischen Ordnungsstrukturen (Strömungsriffel und Dünen) aus sehr kleinen Zufallsstörungen. *Leichtweiss-Institut für Wasserbau der TU Braunschweig, Mitteilungen, Heft 79* , 79.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., CABOT, W. (1991): A dynamic subgrid-scale eddy-viscosity model. *Physics of Fluid* 3, 7, 1760–1765.
- GOLDSTEIN, D., HANDLER, R., SIROVICH, L. (1993): Modeling no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics* 105, 354–366.

- HARLOW, F., WELCH, J. (1965): Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids* 8, 12, 2182–2189.
- HASLINGER, W. (1993): *Berechnung der turbulenten Strömung in einem welligen, offenen Gerinne mit Hilfe eines Mehrschichtenmodells*. Diplomarbeit am Institut für Technische Thermodynamik, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt.
- KARAHAN, M. E., PETERSON, A. W. (1980): Visualization of separation over sandwaves. *Journal of Hydraulic Division* 106, 8, 1345–1352.
- KOLMOGOROV, A. N. (1941): Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *CR Academic Science SSSR*, 32, 16–19.
- KOVACS, A., PARKER, G. (1994): A new vektorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels. *Journal of Fluid Mechanics* 267, 153–183.
- KRAFT, S. (2004): Wandmodellierung in der Grobstruktursimulation. *Bundesanstalt für Wasserbau (nicht veröffentlicht)*.
- KRAFT, S., OBERLACK, M. (2004a): The optimal test filter size using the dynamic subgrid scale model. *Advances in Turbulence X, Proc. of the 10th European Turbulence Conference, Trondheim/Norway*, 857.
- KRAFT, S., OBERLACK, M. (2004b): Wandmodellierung in der LES. *Studie im Auftrag der BAW (Karlsruhe)*.
- KRAFT, S., WENDLING, I., OBERLACK, M., CARATI, D. (2004): Analysis of the applicability of dynamic subgrid scale models in complex geometries. *PAMM*.
- KÜHLBORN, J. (1993): Wachstum und Wanderung von Sedimentriffel. *Technische Berichte über Ingenieurhydrologie und Hydraulik, Technische Hochschule Darmstadt* 49.
- KURENKOV, A., OBERLACK, M. (2005a): *LES of premixed combustion using level set approach: 31st International Symposium on Combustion, submitted*. Comb. Inst.
- KURENKOV, A., OBERLACK, M. (2005b): Modelling turbulent premixed combustion using the level set approach for Reynolds averaged models. *Flow Turbulence and Combustion* 74, 4, 387 – 407.
- LAUNDER, B., SPALDING, D. B. (1972): *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press.
- LILEK, Z. (1996): Ein Finite-Volumen-Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen in komplexen Geometrien mit beweglichen Rändern und freier Oberfläche. *Institut für Schiffbau der Universität Hamburg*, Bericht 563.
- LILLY, D. (1992): A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluid* 4, 3, 633–635.

- LINK, O., ZANKE, U. (2004): Influence of flow depth on scour at a circular pier in uniform coarse sand. *Second International Conference on Scour and Erosion, Nanyang University, Nanyang, Singapore*.
- MADSEN, O. T., GRANT, W. D. (1976): Quantitative description of sediment transport by waves. *Proceeding, 15.th Coastal Engineering Conference, ASCE, New York* 126, 1093–1112.
- VAN MIERLO, M. C. L. M., RUITER, J. C. C. (1988): Turbulence measurement above artificial dunes. *TOW A 55 Vol. I u. II, Report Q 789, Delft Hydraulics*.
- MUZAFERIJA, S., PERI, M., SAMES, P. (1998): A Two-Fluid Navier-Stokes Solver to Simulate Water Entry. *Proceedings 22th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, DC*, 277–289.
- NEUMANN, J. (2003): *Passive und aktive Beeinflussung turbulenter Stufenüberströmung*. Universität München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik.
- NGUYEN, P. D., BRUEL, P. (2003): Turbulent reacting flow in a dump combustor: experimental determination of the influence of the inlet equivalence ratio difference on the contribution of the coherent and stochastic motion to the velocity field dynamics. *AIAA paper*, 03-0958, 1–9.
- OBERLACK, M. (1997): Invariant modelling in large-eddy simulation of turbulence. *Center for Turbulence Research - Annual Research Briefs*, 3–22.
- OSHER, S., FEDKIW, R. (2003): *Level Set Methods and Dynamic implicit surfaces*. Springer.
- OSHER, S., SETHIAN, J. A. (1988): Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi Formulations. *Journal of Computational Physics* 79, 12–49.
- PESKIN, C. S. (1972): Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics* 10, 252–271.
- PETERS, N. (2000): *Turbulent combustion*. Cambridge University Press.
- POPE, S. (2000): *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- RAUDKIVI, A. J. (1963): Study of sediment rippleformation. *Journal of Hydraulic Engineering* 89, 6, 15–33.
- RHEE, C., TALBOT, L., SETHIAN, J. A. (1995): Dynamically study of a premixed V flame. *Journal of Fluid Mechanics* 300, 87–115.
- RHEE, S., MAKAROV, B., KRISHAN, H. (2004): Assessment of Numerical Techniques in Volume of Fluid Method for Free Surface Flows. *9th Symposium on Practical Design of Ships and other Floating Structures, Lübeck-Travemuende, Germany*.
- RHIE, C., CHOW, W. (1983): Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA* 21, 11.

- RICHARDSON, L. (1922): *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press.
- VAN RIJN, L. C. (1982): *The prediction of bedforms and alluvial roughness*, A. A. Balkema, Rotterdam.
- VAN RIJN, L. C. (1984a): Sediment Pick-Up Functions. *Journal of Hydraulic Engineering* 110, 10, 1494–1502.
- VAN RIJN, L. C. (1984b): Sediment Transport Part I: Bed Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering* 110, 10, 1431–1456.
- VAN RIJN, L. C. (1984c): Sediment Transport Part II: Suspended Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering* 110, 11, 1613–1641.
- VAN RIJN, L. C. (1984d): Sediment Transport Part III: Bed Forms and Alluvial Roughness. *Journal of Hydraulic Engineering* 110, 12, 1733–1754.
- VAN RIJN, L. C. (1987): Mathematical modeling of morphological processes in case of suspended sediment transport. *Delft Hydraulic Communication* , 382.
- ROTTA, J. (1974): *Turbulente Strömungen*. Teubner Verlag, Stuttgart.
- ROULUND, A. (2000): *Three-dimensional numerical modelling of flow around a bottom mounted pile and its application to scour*. Ph. D. Thesis, Department of Hydrodynamics and Water Resources, Technical University of Denmark.
- RUDMAN, M. (1997): Volume-Tracking Methods For Interfacial Flow Calculations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* , 24, 671–691.
- RUSSO, G., SMEREKA, P. (2000): A remark on computing distance functions. *Journal of Computational Physics* 163, 51–67.
- SABAU, A., RAAD, P. (1995): On two-dimensional water-solid impact with VOF Methods. *Proceedings of the ASME Fluids Engineering Division* 234, 113–123.
- SAIKI, E. M., BIRINGEN, S. (1996): Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics* 123, 450–465.
- SALVETTI, M. V., BANERJEE, S. (1995): A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulation. *Physics of Fluid* 7, 11, 2831–2847.
- SCHÄFER, M. (1999): *Numerik im Maschinenbau*. Springer Verlag.
- SCHLICHTING, H. (1965): *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G.Braun, Karlsruhe.
- SETHIAN, J. A. (1994): Curvature flow and entropy conditions applied to grid generation. *Journal of Computational Physics* 115, 440–454.
- SETHIAN, J. A. (1999): *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press.

- SHIELDS, A. (1936): *Anwendung der Ähnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung*. Mitteilung der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser und Schiffsbau, Heft 26, Berlin.
- SIMPSON, R. L. (1987): Two-dimensional turbulent separated flow. *AIAA Journal* 25, 6.
- SMAGORINSKY, J. S. (1963): General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review* 91, 91–165.
- SOULSBY, R. L., ATKINS, R., SALKFIELD, P. (1994): Observation of the turbulent structure of suspension of sand in a tidal current. *Continental Shelf Res., Amsterdam., The Netherland* 14, 4, 429–435.
- SPEZIALE, C. G. (1995): A review of Reynolds Stress Models for turbulent shear flows. *Aerospace and Mechanical Engineering Department, Boston University*.
- STARCD (2002): *Methodology - StarCD Version 3.15A*. Computational Dynamics Limited, CD adapco Group.
- SULZER, S. C. (2001): Flood Discharge Estimation for complex River Geometries by Inverse numerical Modelling. *Dissertation an der ETH Zürich*, 14383.
- TECLOT (2005): *User's Manual - Tecplot Version 10*. GENIAS Graphics Software GmbH.
- TSENG, Y.-H., FERZIGER, J. H. (2003): A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 192, 593–623.
- VAN DRIEST, E. R. (1956): On turbulent flow near a wall. *Journal of Aeronautical Sciences* 23, 1007–1011.
- VILLARET, C., DAVIS, A. (1988): Modelling sediment turbulent flow interactions. *Applied Mechanics Review* 48, 9, 601–609.
- WALLISCH, S. (1996): Ein mathematisches Modell zur Berechnung der hydromechanischen Beanspruchung von Riffelsohlen. *Technische Berichte über Ingenieurhydrologie und Hydraulik, Technische Hochschule Darmstadt* 54.
- WIESEMANN, J.-U., MEWIS, P., ZANKE, U. (2004): Influence of flow depth on scour at a circular pier in uniform coarse sand. *Second International Conference on Scour and Erosion, Nanyang University, Nanyang, Singapore*.
- WILCOX, D. C. (1998): *Turbulence Modeling for CFD*. D C W Industries.
- WILLIAMS, J. (1964): Algorithm 232: Heapsort. *Communications of the ACM* 7, 6, 347–348.
- WU, W., RODI, W., WENKA, T. (2000): 3D Numerical Modeling of Flow and Sediment Transport in Open Channel. *Journal of Hydraulic Engineering* 126, 1, 4–15.
- YALIN, M. S. (1977): *Mechanics of Sediment Transport*. Pergamon Press, Oxford, England, 2nd Ed.

- YALIN, M. S. (1985): On the Determination of Ripple Geometry. *Journal of Hydraulic Engineering* 111, 8, 1148–1155.
- YOUNGS, D. (1982): Time-Dependent Multi-Material Flow with Large Fluid Distortion. in Morton K.W. und Baines, M.J.(Eds), *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic, New York, 273–285.
- ZANKE, U. (1982): *Grundlagen der Sedimentbewegung*. Springer Verlag.
- ZANKE, U. C. E. (1977): Berechnung der Sinkgeschwindigkeiten von Sedimenten. *Mitteilungen des Franzius-Instituts für Wasserbau, Technische Universität Hannover*, 46, 243.
- ZANKE, U. C. E. (1999): Zur Physik von strömungsgetriebenem Sediment (Geschiebetrieb). *Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Technische Hochschule Darmstadt Mitteilungen Heft 106*.
- ZANKE, U. C. E. (2001): Zum Einfluss der Turbulenz auf den Beginn der Sedimentbewegung. *Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Technische Hochschule Darmstadt Mitteilungen Heft 120*.
- ZANKE, U. C. E. (2002): *Hydromechanik der Gerinne und Küstengewässer*. Parey Buchverlag Berlin.
- ZEDLER, E., STREET, R. L. (2001): Large-Eddy-Simulation of Sediment Transport: Current over Ripples. *Journal of Hydraulic Engineering* 127, 6, 444–452.
- ZHANG, H., ZHENG, L. L., PRASAD, V., HOU, T. (1998): A curvilinear level set formulation for highly deformable free surface problems with application to solidification. *Num. Heat Transfer B* 34, 1–20.
- ZHAO, H.-K., CHAN, T., MERRIMAN, B., OSHER, S. (1996): A variational Level Set Approach to multiphase flow. *J. Comp. Phys.* 127, 179–195.

Lebenslauf

Susanne Kraft

Persönliche Daten:

Geburtsdatum: 16. Juni 1975
Geburtsort: Darmstadt
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: verheiratet,
eine Tochter, geboren 2004 und ein Sohn, geboren 2007

Schulbildung:

08/82 - 07/86 Grundschule in Griesheim
08/86 - 12/88 Gymnasium in Darmstadt
Abschluß: Allgemeine Hochschulreife

Studium:

10/95 - 09/01 Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Darmstadt
Zwischenprüfung: Vordiplom
Abschluß: Diplom

Berufliche Tätigkeit:

10/01 - 03/02 Planungsingenieurin bei Sydro Consult, Darmstadt
04/02 - 09/08 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am
Fachgebiet für Strömungsdynamik
seit 10/08 Entwicklungsingenieurin bei der Adam Opel GmbH, Rüsselsheim